MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNIVERSITY OF HAWAII LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

L. BIEBERBACH W. BLASCHKE L. FEJÉR G. H. HARDY E. HECKE
G. HERGLOTZ E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR H. WEYL

35. BAND. 1. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 25. FEBRUAR 1932)

QA1
M88
v.35-36

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1932

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, die zu Bänden von 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen und deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Der Text ist in lateinischer Schrift abzufassen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

SCHRIFTLEITUNG DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

K. Knopp, Tübingen, Neckarhalde 56,
L. Lichtenstein, Leipzig, Großgörschenstraße 3,
E. Schmidt, Berlin NW, Altonaerstr. 30,
I. Schur, Berlin-Schmargendorf, Ruhlaerstr. 14.

---

35. Band. **Inhalt:** 1. Heft.

Seite

Mordell, L. J., On the representation of a binary quadratic form as a sum of squares of linear forms 1
Bose, R. C., On the number of circles of curvature perfectly enclosing or perfectly enclosed by a closed convex oval 16
Vogelsang, W., Eine Verallgemeinerung der konfokalen Flächen zweiter Ordnung 25
Brauer, A., Über die Verteilung der Potenzreste 39
Ridder, J., Über die Bedingung (N) von Lusin und das allgemeine Denjoysche Integral 51
Kolmogoroff, A., Zur Deutung der intuitionistischen Logik 58
Haack, W., Affine Differentialgeometrie der parabolischen Strahlensysteme . . 66
v. Sz. Nagy, J., Über die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex 80
Rogosinski, W., Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen 93
Bochner, S., Limitierung mehrfacher Folgen nach dem Verfahren der arithmetischen Mittel 122
Young, R. C., On many-valued "inner" Stieltjes integration 127
Garten, V., und K. Maruhn, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Eine aus zwei getrennten Ringkörpern bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit 154

On the representation of a binary quadratic form as a sum of squares of linear forms.

Von

L. J. Mordell in Manchester.

§ 1.

Let

$$f(x, y) = a x^2 + 2 h x y + b y^2, \tag{1}$$

be a given binary quadratic form with rational coefficients. An interesting problem is to investigate the necessary and sufficient conditions under which for given integer $n > 0$, rational numbers a_r, b_r exist such that

$$f(x, y) = \sum_{r=1}^{n} (a_r x + b_r y)^2. \tag{2}$$

No generality is lost in assuming that a, h, b are all integers as a common denominator d_1 disappears on considering $d_1^2 f(x, y)$. Suppose also that $d = [a, h, b] > 0$ is the greatest common factor of a, h, b and is free from squared factors > 1.

Clearly, a necessary condition is that

$$a \geqq 0, \qquad \Delta = a b - h^2 \geqq 0.$$

The case $\Delta = 0$, *i. e.* when

$$f(x, y) \equiv j(f x + g y)^2,$$

say, where $j > 0$ is an integer, includes also the case $a = 0$. By effecting a linear transformation on x, y, we may take $f = 1$, $g = 0$. Then obviously

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0,$$

and

$$j = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2. \tag{3}$$

The theory of this equation is now classic.

When $n = 2$, integer solutions of (3) exist if and only if j has no prime factors $\equiv 3 \pmod 4$ and > 0, or say of the type ω. This is also

the condition for rational solutions of (3). For if

$$a_1 = \frac{A_1}{D_1}, \quad a_2 = \frac{A_2}{D_1} \quad \text{where} \quad [A_1, A_2, D_1] = 1,$$
$$j D_1^2 = A_1^2 + A_2^2.$$

Hence neither j nor D_1 can be divisible by an ω, and then for such a given D_1, integer values exist for A_1, A_2.

When $n = 3$, integer solutions of (3) exist if and only if j is not of the form $4^\varrho(8\sigma + 7)$ where $\varrho \geqq 0$, $\sigma \geqq 0$ are any integers. This also holds for rational solutions.

When $n \geqq 4$, integer solutions and also fractional ones always exist.

We may suppose then that $\Delta > 0$. Let m be any integer properly represented by $f(x, y)$, *i. e.*

$$m = f(P, Q),$$

where P, Q are integers and $[P, Q] = 1$. Let m_1, Δ_1 be the respective quotients of m and Δ by their greatest squared factors so that

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_0^2, \qquad m = m_1 m_0^2.$$

We may assume $[m_1, \Delta_1] = 1$ without loss of generality, as will be seen shortly, by proper choice of P, Q.

Then (2) is satisfied if and only if

I. $n = 2$,

Δ is a perfect square, and $d = [a, h, b]$ has no prime factors $\equiv 3 \pmod 4$.

II. $n = 3$,

$-m_1$ is a quadratic residue of Δ_1, *i. e.* the congruence

$$z^2 + m_1 \equiv 0 \pmod{\Delta_1}$$

has a solution: and also $-\Delta_1$ is a quadratic residue of m_1. If m_1 is such that $\frac{m_1}{d}$ is prime to both $\frac{a}{d}$ and $\frac{\Delta_0}{d}$, the last part means simply that $-\Delta_1$ is a quadratic residue of d.

III. $n = 4$,

Δ is not of the form $4^\varrho(8\sigma + 7)$, *i. e.* Δ can be expressed as the sum of the squares of three integers.

IV. $n \geqq 5$,

no condition is required and the representation is always possible.

The last result is due to Landau[1]). I do not know if the third has been explicitly stated, but very likely it is already known[1]).

[1]) Landau, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, Archiv der Mathematik und Physik (3) 7 (1904), S. 271–277.

It may be noted that in the particular case when $a = 1, h = 0, b = \Delta$, these results mean that

$$x^2 + \Delta y^2$$

can be expressed as a sum of $r + 1$ rational linear squares if and only if Δ can be expressed as a sum of squares of r integers.

A more difficult investigation to which I can give only a partial solution is for given $f(x, y)$ to find the minimum value of n if a_r, b_r are all to be integers. I prove that for all $f(x, y)$ and $n = 8$, integer values of a_r, b_r exist, (say integral representations exist) and that 8 can be replaced by 6 if $h = 0$. The preceding results show that $n \geqq 5$, so that the margin is rather wide when $h \neq 0$ and fairly narrow when $h = 0$.

Finally, there is the extension to definite forms of more than two variables, say N. I prove that they can be expressed as a sum of $N + 3$ squares of rational linear forms. This is the best result (*i. e.* $N + 2$ does not suffice) for the general form when $N = 1$ or 2 but I do not know if this is so for $N \geqq 3$.

The original question is one which in its present setting seems perhaps not to have been fully considered. It is an instructive example of the methods of the Theory of Numbers. Not only is there a complete solution, but also new problems and ideas are suggested. Thus I have been led to a simple proof of Meyer's criterion for the solvability in integers of

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0$$

and similar questions: and which is being published elsewhere.

In addition to the unsolved problems noted above, there is also the obvious one to find an asymptotic formula for the number of integral representations of (2) when $n = 8$ and Δ is large.

§ 2.

For the justification of the assumption $[m_1, \Delta_1] = 1$, let p be a prime factor of $d = [a, h, b]$ and let p^λ $(\lambda > 1)$ be the highest power of p dividing Δ_0. Since d has no squared factors > 1, p^2 is not a divisor of both $[a, h]$, $[b, h]$ say not of $[a, h]$. We may now suppose $a \not\equiv 0 \pmod{p^2}$ if $p > 2$. For if both $a \equiv 0 \pmod{p^2}$, $b \equiv 0 \pmod{p^2}$, a change of x into $x + y$ would replace a by $a + 2h + b \not\equiv 0 \pmod{p^2}$. Then m_1 will be prime to p if m is divisible by $p^{2\lambda}$ and not $p^{2\lambda+1}$, *i. e.*

$$(aP + hQ)^2 + \Delta_1 \Delta_0^2 Q^2 \equiv 0 \pmod{p^{2\lambda+1}} \quad \text{and not} \quad p^{2\lambda+2}.$$

If $\Delta_1 \equiv 0 \pmod{p}$, take

$$Q \equiv 1 \pmod{p^{2\lambda+2}}, \qquad aP + hQ \equiv 0 \pmod{p^{\lambda+1}}.$$

If $\Delta_1 \not\equiv 0 \pmod p$, take $Q \equiv 1 \pmod{p^{2\lambda+2}}$, and a suitable value of P is found on putting

$$aP + hQ \equiv p^\lambda P_1 \pmod{p^{\lambda+1}}$$

where P_1 is a new variable.

This process can be applied to all the odd prime divisors of d.

If $p = 2$, and

$$a \equiv 0 \pmod{2^2}, \quad b \equiv 0 \pmod{2^2}, \quad h \equiv 0 \pmod 2,$$

then $m \equiv 0 \pmod{2^2}$ but now Δ_1 is odd. For $h \equiv 2 \pmod 4$ and so

$$\Delta \equiv 0 \pmod 4 \quad \text{and not } 0 \pmod 8.$$

The case when $p = 2$ and $a \equiv 0 \pmod 2$ and not $0 \pmod 4$ is included above.

§ 3.

It is convenient to replace $f(x, y)$ by a simpler form with no middle term. Take integers R, S so that

$$PS - QR = 1,$$

and put

$$x = PX + RY, \quad y = QX + SY.$$

Then

$$f(x, y) = mX^2 + 2eXY + lY^2,$$

say,

$$= m\left\{\left(X + \frac{eY}{m}\right)^2 + \frac{\Delta}{m^2}Y^2\right\}.$$

Put

$$X + \frac{eY}{m} = \Delta_0 X_1, \quad Y = mY_1, \quad m = m_1 m_0^2, \quad \Delta = \Delta_1 \Delta_0^2$$

so that instead of (1) we need only consider the form

$$m_1(X_1^2 + \Delta_1 Y_1^2), \tag{4}$$

or say

$$Ax^2 + By^2.$$

Let

$$\gamma = [A, B], \quad A = \alpha\gamma, \quad B = \beta\gamma.$$

Since m_1 is prime to Δ_1 and neither m_1 nor Δ_1 has a squared factor, no one of α, β, γ has a squared factor, nor any two a common factor.

Take first $n = 2$, so that

$$Ax^2 + By^2 = (a_1 x + b_1 y)^2 + (a_2 x + b_2 y)^2,$$

whence

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0, \quad b_1^2 + b_2^2 = B, \tag{5}$$

$$a_1^2 + a_2^2 = A. \tag{5.1}$$

The equation (5.1) is possible if and only if A and hence m_1 in $m = m_1 m_0^2$ has no factors of the type ω, and then from (5),

$$b_1^2(a_1^2 + a_2^2) = B a_2^2.$$

This gives a rational value for b_1 and so for b_2, if and only if AB is a perfect square and then $\Delta_1 = 1$. This proves I, since if $[a, h, b]$ has no prime factor $\equiv 3 \pmod 4$, integers P, Q exist such that

$$f(P, Q) = m_1 m_0^2,$$

and m_1 has no factor $\equiv 3 \pmod 4$. For if a is not divisible by an ω, we need only take $P = 1$, $Q = 0$. If $a \equiv 0 \pmod \omega$, then $ab - h^2 = \Delta_0^2$ shows that $h \equiv 0 \pmod \omega$ and hence $a \equiv 0 \pmod{\omega^2}$. This applies to all the ω factors of a and so m_1 is not divisible by an ω for $P = 1$, $Q = 0$.

When this representation is possible, it is also possible with integer values for a_1, b_1, a_2, b_2. A linear transformation of determinant unity shows there is no loss of generality in assuming that a has no squared factors. Since $[a, h, b]$ is a sum of two squares, and

$$(U^2 + V^2)(u^2 + v^2) = (Uu + Vv)^2 + (Uv - Vu)^2,$$

we may take $[a, h, b] = 1$. Now

$$ab - h^2 = \Delta_0^2, \qquad h^2 \equiv -\Delta_0^2 \pmod a,$$

and the solution of the congruence for h gives

$$h \equiv -\frac{\Delta_0 a_1}{a_2} \pmod a$$

for an appropriate resolution of a as a sum of two integral squares, say,

$$a = a_1^2 + a_2^2.$$

It is easy to verify that

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = \left(a_1 x + \frac{a_1 h - a_2 \Delta_0}{a} y\right)^2 + \left(a_2 x + \frac{a_2 h + a_1 \Delta_0}{a} y\right)^2,$$

and that

$$\frac{a_1 h - a_2 \Delta_0}{a}, \qquad \frac{a_2 h + a_1 \Delta_0}{a},$$

are both integers.

§ 4.

Take next $n = 3$. Put

$$a_3 = \frac{q}{t}, \qquad b_3 = \frac{p}{t},$$

where $p, q, t \neq 0$ are integers and $[p, q, t] = 1$. Then from (4)

$$t^2(\alpha\gamma x^2 + \beta\gamma y^2) - (qx + py)^2, \tag{6}$$

is the sum of two squares. Firstly its discriminant is a perfect square so that

$$(\alpha\gamma t^2 - q^2)(\beta\gamma t^2 - p^2) - p^2 q^2 = \gamma^2 t^2 r^2$$

say, for the left hand side is divisible by γt^2 and γ has no squared factors. Hence

$$\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2 = \alpha\beta\gamma t^2, \tag{7}$$

which shows that

$$\alpha\gamma t^2 - q^2 > 0,$$

so that (6) is a definite form. It also shows that p and q cannot both be zero, unless $\alpha = \beta = 1$.

Secondly,

$$[\alpha\gamma t^2 - q^2,\ \beta\gamma t^2 - p^2,\ pq] \not\equiv 0 \pmod{\omega}, \tag{8}$$

the condition that the coefficients of the form (6) should have no common prime factor $\equiv 3 \pmod 4$.

The possibility of satisfying (7), (8) by integer values of p, q, r, t must be examined. No three of them can have a common factor, for since α, β, γ are free from squared factors, (7) shows that the common factor would occur in the fourth, whereas[1a] $[p, q, t] = 1$.

The condition (8) can be simplified for it is the same as that no one of

$$[p, q, \gamma],\ [q, r, \alpha],\ [r, p, \beta], \tag{9}$$

should have a factor of the type ω. Suppose first one of them has a factor ω.

Clearly if $[p, q, \gamma] \equiv 0 \pmod{\omega}$, (8) is not satisfied. If

$$[q, r, \alpha] \equiv 0 \pmod{\omega},$$

(7) shows

$$\alpha(\beta\gamma t^2 - p^2) \equiv 0 \pmod{\omega^2}.$$

But α has no squared factors, so that

$$\beta\gamma t^2 - p^2 \equiv 0 \pmod{\omega},$$

and (8) is violated. Symmetry disposes of the case

$$[r, p, \beta] \equiv 0 \pmod{\omega}.$$

Conversely suppose that (8) does not hold, so that the left hand side is divisible by ω. As ω is a divisor of pq, take $p \equiv 0 \pmod{\omega}$. Then

$$\beta\gamma t^2 \equiv 0 \pmod{\omega}, \qquad \alpha\gamma t^2 - q^2 \equiv 0 \pmod{\omega}.$$

The latter combined with (7) shows that

$$\gamma r^2 \equiv 0 \pmod{\omega}.$$

[1a] The change in the argument is obvious if $p = q = 0$.

Now $[p, t, r] \not\equiv 0 \pmod{\omega}$, and so either $\gamma \equiv 0 \pmod{\omega}$, and then by (8), $q \equiv 0 \pmod{\omega}$, and so $[p, q, \gamma] \equiv 0 \pmod{\omega}$; or $r \equiv 0 \pmod{\omega}$, $\beta \equiv 0 \pmod{\omega}$, $[p, r, \beta] \equiv 0 \pmod{\omega}$.

This proves the converse.

I now prove that (7), (9) will be satisfied by integers p, q, r, t no three of which have a common factor ((7) shows $t \neq 0$) if and only if $-\beta\gamma$, $-\gamma\alpha$, $-\alpha\beta$ are quadratic residues of α, β, γ respectively. This is written as

$$-\beta\gamma R\alpha, \quad -\gamma\alpha R\beta, \quad -\alpha\beta R\gamma. \tag{10}$$

This condition is necessary. For let δ be any prime dividing γ and take (7) as a congruence mod δ. Then

$$\alpha p^2 + \beta q^2 \equiv 0 \pmod{\delta}.$$

If p and q are both prime to δ, $-\alpha\beta R\delta$. If either p or q is divisible by δ, both are since $[\alpha, \gamma] = [\beta, \gamma] = 1$ and so $[t, \delta] = [r, \delta] = 1$. Then (7) shows that

$$\gamma(\alpha\beta t^2 - r^2) \equiv 0 \pmod{\delta^2},$$

whence

$$\alpha\beta t^2 - r^2 \equiv 0 \pmod{\delta}.$$

But $[\alpha\beta, \delta] = 1 = [r, \delta]$, and so $\alpha\beta R\delta$. But now $[p, q, \gamma] \equiv 0 \pmod{\delta}$ so that δ cannot be an ω. Hence $-1 R\delta$ and then $-\alpha\beta R\delta$. This holds if $\delta = 2$, and so $-\alpha\beta$ is a quadratic residue of γ.

To show that (10) is a sufficient condition, we need some results due to Meyer.

Let A, B, C, D be given integers not all of the same sign, free from squared factors > 1, and such that no three of them have a common factor. Then if $ABCD \equiv 2, 3, 5, 6, 7 \pmod{8}$ the equation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0$$

has integer solutions with $[x, y, C, D] = 1$ or 2 together with five similar restrictions if and only if $-AB R[C, D]$, together with five similar conditions.

This also holds if A and B are even and

$$\tfrac{1}{4} ABCD \equiv 3, 5, 7 \pmod{8}.$$

A proof of the first part is given by Bachmann [2]). The second was stated by Meyer without proof. I am giving a simple proof of all of his results of this kind in the Journal für die reine und angewandte Mathematik.

---

[2]) Bachmann, Zahlentheorie **4** (1), 1898, p. 259.

For the present application we have

$$A = \alpha, \quad B = \beta, \quad C = \gamma, \quad D = -\alpha\beta\gamma,$$

and so

$$ABCD = -\alpha^2\beta^2\gamma^2 \equiv -1 \pmod 8,$$

if α, β, γ are all odd: while if one is even, D is also even and

$$\frac{1}{4}ABCD \equiv -1 \pmod 8.$$

Also $[A, B] = 1$, $[A, D] = \alpha$ and so the conditions reduce to those in (10).

We can now complete the results for three squares. From (4)

$$\gamma = m_1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = \Delta_1,$$

and the conditions (10) become $-m_1 R\Delta_1$, $-\Delta_1 R m_1$.

If $d = [a, h, b]$ and $\frac{m_1}{d}$ is prime to both $\frac{a}{d}$ and $\frac{\Delta_0}{d}$, $-\Delta_1 R m_1$ is equivalent to $-\Delta_1 R d$. For write in

$$m_1 m_0^2 = aP^2 + 2hPQ + bQ^2,$$

$$a = da_1, \quad b = db_1, \quad h = dh_1, \quad m_1 = dM_1, \quad \Delta_0 = dD_0.$$

Hence

$$a_1 M_1 m_0^2 = (a_1 P + h_1 Q)^2 + \Delta_1 D_0^2 Q^2.$$

From this $-\Delta_1 R M_1$ or $-\Delta_1 R\left(\frac{m_1}{d}\right)$, leaving still to be satisfied $-\Delta_1 R d$, provided $[D_0 Q, M_1] = 1$. Now $[Q, M_1] = 1$ for a common factor of Q, M_1 would divide $\frac{aP^2}{d}$ *i. e.* $\frac{a}{d}$ contrary to hypothesis. Also $[D_0, M_1]$ by hypothesis.

This completes the proof.

In the particular case when $d = 1$, *i. e.* when the form

$$ax^2 + 2hxy + by^2$$

is primitive, the result is included in the theory of the definite ternary quadratic[3]). The representation, if possible, will be so for integer values of a_r, b_r $(r = 1, 2, 3)$.

§ 5.

Take next the case of four squares[4]). Here

$$Ax^2 + By^2 = \sum_{r=1}^{4} (a_r x + b_r y)^2.$$

[3]) Cf. Bachmann, loc. cit., p. 70–84 and also H. J. S. Smith, On the orders and genera of ternary quadratic forms, Philosophical Transactions of the Royal Society **157** (1867), p. 255–298 or Collected Works **1** (1894), p. 455–509, in particular p. 473–474 for the conditions under which a binary quadratic form can be represented by a ternary form.

[4]) Cf. Landau, loc. cit., who carries out the process for $A = 1$, $B = 7$ and so perhaps knew the result.

Hence

$$A = \sum_{r=1}^{4} a_r^2, \qquad B = \sum_{r=1}^{4} b_r^2, \qquad 0 = \sum_{r=1}^{4} a_r b_r$$

and so

$$AB = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2, \text{ etc.},$$

where by a classical theorem A_1, A_2, A_3, A_4 are linear expressions in a_r, b_r. Also we can take

$$A_1 = \sum_{r=1}^{4} a_r b_r = 0.$$

Hence AB can be expressed as a sum of three rational squares: and so a necessary condition for the case of four squares is that

$$AB \neq 4^\varrho (8\sigma + 7).$$

This condition is sufficient, for

$$Ax^2 + By^2 = A^{-1}((Ax)^2 + ABy^2).$$

Since AB can be expressed as a sum of three squares and A^{-1} as a sum of four squares, the right hand side is the product of a sum of four squares by a sum of four squares, and the result.

Finally in the case of five squares, we may assume either that

$$AB \equiv 7 \pmod 8,$$

or that

$$A = 2A_1, \qquad B = 2B_1$$

where

$$A_1 B_1 \equiv 7 \pmod 8.$$

Hence in the first case,

$$A \equiv 1 \pmod 8, \qquad B \equiv 7 \pmod 8,$$

or

$$A \equiv 3 \pmod 8, \qquad B \equiv 5 \pmod 8,$$

and two more derived by interchanging A and B. But now $Ax^2 + By^2 - y^2$ can be expressed as a sum of four squares when $A(B-1) \equiv 6 \pmod 8$; and also $Ax^2 + By^2 - x^2$ when $(A-1)B \equiv 2 \pmod 8$.

So when $A_1 \equiv 1 \pmod 8$, $B_1 \equiv 7 \pmod 8$, $2A_1 x^2 + 2B_1 y^2 - y^2$ can be expressed as a sum of four squares. When $A_1 \equiv 3 \pmod 8$, $B_1 \equiv 5 \pmod 8$, this also holds for $2A_1 x^2 + 2B_1 y^2 - x^2$. Hence the result.

For $n = 2, 3, 4, 5$ it is easy to see when one rational representation exists, then an infinity exist. For example, when $n = 2$, we take an arbitrary square $s^2 - A^2 + B^2$ where A and B are rational and neither zero, and multiply the right side of (2) by $\frac{A^2}{s^2} + \frac{B^2}{s^2}$, etc. Similarly when $n = 4$ and hence also the result for $n = 5$. The proof for $n = 3$ shows the result is also true then.

§ 6.

The result for the positive definite quadratic form in N variables requires Meyer's theorem: that

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0 \tag{11}$$

is always possible in integers $x_1, \ldots, x_5$, not all zero, if Φ is an indefinite quadratic form with rational coefficients and with non-zero discriminant so that Φ cannot be expressed as a quadratic form in less than five variables. I have given a simple proof in the paper already noted.

Take first the case of the ternary quadratic for which I show now that

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=\sum_{r=1}^{6}(a_rx+b_ry+c_rz)^2.$$

Obviously ax^2+by^2+2hxy is a positive, definite form. If a_6, b_6 are taken as arbitrary rational numbers, we can find a_r, b_r $(r=1, \ldots, 5)$ so that

$$ax^2+2hxy+by^2-(a_6x+b_6y)^2=\sum_{r=1}^{5}(a_5x+b_5y)^2.$$

provided of course a_6, b_6 are so small that the left hand side is a positive definite form.

Three conditions now arise, namely,

$$\sum_{r=1}^{6}c_r^2=c, \quad \sum_{r=1}^{6}c_ra_r=g, \quad \sum_{r=1}^{6}c_rb_r=f. \tag{12}$$

From the last two equations, two of the c's say c_5, c_6 can be expressed linearly and rationally in terms of the other two. Substitute in the first equation and write $c_1=\frac{x_1}{x_5}, \ldots, c_4=\frac{x_4}{x_5}$. An equation of the form (11) arises in which the discriminant does not vanish.

For there is no loss of generality in putting $f=g=0$, as we need only replace z by $z+\lambda x+\mu y$ where λ, μ are given by $c\lambda+g=0$, $c\mu+f=0$.

The equation in x_1 etc. then takes the form

$$\sum_{r=1}^{4}x_r^2+\left(\sum_{r=1}^{4}A_rx_r\right)^2-\left(\sum_{r=1}^{4}B_rx_r\right)^2=cx_5^2. \tag{11.1}$$

It suffices to show that the discriminant of the left hand side is not zero for real values of the A's and B's. If it were, the left hand side, say ψ, would vanish for non zero real values of x_1, x_2, x_3, x_4. For ψ could be expressed in terms of $r_1+2r_2<4$ linear forms of which r_1 have real coefficients, and $2r_2$ have complex coefficients and ψ would be zero if all

the linear forms are zero. This would give $r_1 + 2r_2 < 4$ *real* conditions which can be satisfied by real values of x_1, x_2, x_3, x_4, not all zero.

Hence in (11.1) integer values of $x_1, \ldots, x_5$ where clearly $x_5 \neq 0$ exist and so the result for the ternary quadratic. (The same method applies to the binary quadratic).

Next for definite quaternary forms, we require seven linear forms,

$$a_r x + b_r y + c_r z + d_r t \qquad (r = 1, \ldots, 7).$$

Then as before a_1, b_1, c_1 say, are arbitrary rational numbers not too large and a_r, b_r, c_r $(r = 2, \ldots, 7)$ are given by the ternary case. We then have four equations in $d_1, d_2, \ldots, d_7$, of which the first is of the second degree and the others of the first degree. The latter determine d_5, d_6, d_7 in terms of d_1, d_2, d_3, d_4. We have again an equation of the second degree in d_1, d_2, d_3, d_4 and the same argument as before applies on transforming t in the original quadratic form so that the coefficients of tx, ty, tz are zero and noting that the discriminant of the equations in the x's, where $d_1 = \frac{x_1}{x_5}$, etc., is not zero for the same reason as above.

§ 7.

We now come to the question of integral representations. Take first

$$f(x, y) = a x^2 + b y^2,$$

where the integers a, b may be supposed free from squared factors as these could be absorbed in the variables. All the letters hereafter except the two variables x, y denote integers.

Suppose first neither $a \equiv 7 \pmod 8$, nor $b \equiv 7 \pmod 8$. Then a and b can each be expressed as a sum of squares of three integers and so six squares suffice for $f(x, y)$.

Next suppose $a \equiv 7 \pmod 8$, $b \equiv 7 \pmod 8$. Any odd number a can be expressed in the form

$$a = x_1^2 + y_1^2 + 2z_1^2.$$

For $2a$ can be expressed as a sum of three squares of which one is even and the other two are odd, *i. e.* we can write

$$2a = (x_1 + y_1)^2 + (x_1 - y_1)^2 + 4z_1^2$$

with integers x_1, y_1, z_1.

So

$$b = x_2^2 + y_2^2 + 2z_2^2.$$

Then

$$f(x, y) = (x_1^2 + y_1^2)x^2 + (x_2^2 + y_2^2)y^2 + (z_1 x + z_2 y)^2 + (z_1 x - z_2 y)^2,$$

and six squares suffice.

Finally, suppose only one of $a, b \equiv 7 \pmod 8$, say b. If a is odd, we write

$$2f(x, y) = 2ax^2 + 2by^2 = (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2)x^2 + (x_4^2 + y_4^2 + z_4^2)y^2,$$

say. One of x_3, y_3, z_3 is even, say z_3, and the other two are odd. Similarly for x_4, y_4, z_4, suppose z_4 is even. Hence

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(x_3 + y_3)^2 x^2 + \frac{1}{4}(x_3 - y_3)^2 x^2 + \frac{1}{4}(x_4 + y_4)^2 y^2 + \frac{1}{4}(x_4 - y_4)^2 y^2 + \frac{1}{4}(z_3 x + z_4 y)^2 + \frac{1}{4}(z_3 x - z_4 y)^2,$$

i. e. six squares.

Suppose then a is even. First let $a \geqq b$. Now

$$b = x_2^2 + y_2^2 + 2z_2^2,$$

where x_2, say, is odd and y_2 is even.

Then

$$0 \leqq a - x_2^2 - y_2^2 \equiv 1 \pmod 2,$$

and so we can put

$$a = x_2^2 + y_2^2 + x_5^2 + y_5^2 + 2z_5^2.$$

Then

$$f(x, y) = (x_2^2 + y_2^2)(x^2 + y^2) + (x_5^2 + y_5^2)x^2 + 2(z_5^2 x^2 + z_2^2 y^2).$$

Each of these three terms can be expressed as the sum of two squares of linear expressions with integer coefficients, and so $f(x, y)$ can be expressed as the sum of six squares.

Finally, suppose a is even and $a < b$.

Then

$$a = x_6^2 + y_6^2 + z_6^2,$$

where z_6, say, is even and x_6, y_6 are odd.

Then

$$0 < b - x_6^2 - y_6^2 \equiv 5 \pmod 8,$$

$$= x_7^2 + y_7^2 + z_7^2$$

and

$$f(x, y) = (x_6^2 + y_6^2)(x^2 + y^2) + z_6^2 x^2 + (x_7^2 + y_7^2 + z_7^2)y^2,$$

and six squares suffice.

§ 8.

We deal now with

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2.$$

By effecting a linear transformation of determinant unity, we may suppose the form is reduced *i. e.*

$$b \geqq a \geqq 2h.$$

I show that on subtracting two appropriate squares of linear forms, with integer coefficients, the term in xy vanishes. Hence from the preceding, $f(x, y)$ can be expressed as the sum of the squares of eight linear forms with integer coefficients.

Thus we subtract when

$$\begin{aligned} h &= 1, && (x+y)^2, \\ h &= 2, && (2x+y)^2, \\ h &= 3, && (2x+y)^2 + (x+y)^2, \\ h &= 4, && (2x+2y)^2, \\ h &= 5, && (3x+y)^2 + (x+2y)^2, \\ h &= 6, && (3x+2y)^2. \end{aligned}$$

Then in the resulting forms $Ax^2 + By^2$, $A \geqq 0$, $B \geqq 0$, since $a \geqq 2h$.

On writing $-y$ for y if need be, we may suppose $h > 0$. Put

$$h = M^2 + N \quad \text{where} \quad 0 \leqq N \leqq 2M, \qquad M > 0.$$

Take two of the linear forms to be

$$Mx + py, \qquad (M-1)x + qy.$$

We must have

$$a \geqq M^2 + (M-1)^2$$

which is satisfied since

$$a \geqq 2h \geqq 2M^2 > M^2 + (M-1)^2.$$

And also we must have

$$b \geqq p^2 + q^2,$$

and it is sufficient if

$$2h \geqq p^2 + q^2.$$

Lastly

$$h = pM + q(M-1).$$

Since M, $M-1$ are prime to each other, this equation has integer solutions in p, q both $\geqq 0$ if $h > M(M-1)$ which is so. Further we may suppose $pq \geqq M$.

For $q \neq 0$ unless $N = 0$, M, $2M$ corresponding to $p = M$, $M+1$, $M+2$. We can then take $q = M$, $p = 1, 2, 3$ respectively.

So $p \neq 0$ unless $N = M-2$, $2M-3$ corresponding to $q = M+2$, $M+3$, since then

$$q = M + 1 + \frac{(N+1)}{(M-1)}.$$

We can then take $p = M-1$, $q = 2, 3$ respectively.

Next either p or $q \geqq \frac{1}{2}M$, as otherwise

$$pM + q(M-1) \leqq M^2 - \frac{1}{2}M < h.$$

Hence $pq \geqq M$ except possibly if $p=1$ or $q=1$. But when $p=1$, $N = 0$, $M-1$, $2M-2$ giving $q = M, M+1, M+2$ and so $pq \geqq M$.

If, however, $q=1$, $N = M-1$, $2M-1$ giving $p = M, M+1$ and so $pq \geqq M$.

Now

$$h^2 = p^2M^2 + q^2(M-1)^2 + 2pqM(M-1)$$
$$\geqq (M-1)^2(p^2+q^2) + 2M - 1 + 2M^2(M-1).$$

And then

$$2h \geqq p^2 + q^2$$

if we have

$$2h(M-1)^2 \geqq h^2 - 2M + 1 - 2M^2(M-1),$$

or

$$[h-(M-1)^2]^2 \leqq (M-1)^4 + 2M^2(M-1) + 2M - 1. \tag{12}$$

If $M-1$, this means $h \leqq 1$, leaving undecided $h = 2, 3$, which have already been considered.

When $M \geqq 2$, the inequality (12) is satisfied by all integer values of M if $N \leqq 2M-4$. For then

$$h \leqq M^2 + 2M - 4,$$

and it suffices if

$$(4M-5)^2 \leqq (M-1)^4 + 2M^2(M-1) + 2M - 1. \tag{13}$$

This holds if $M \geqq 5$, for then

$$(4M-5)^2 < (4M-4)^2 \leqq (M-1)^4.$$

It is easily seen that (13) holds for $M = 2, 3, 4$.

We now deal with the cases when $N > 2M-4$ so that h takes the form

$$0 < h = r^2 - 1, \quad r^2 - 2, \quad r^2 - 3, \quad r^2 - 4.$$

If $h = r^2 - 1 > 0$, we subtract from $f(x, y)$

$$(x-y)^2 + (rx+ry)^2.$$

This requires $a \geqq r^2 + 1$ and is satisfied since $2r^2 - 2 \geqq r^2 + 1$ when $r^2 \geqq 3$.

If $h = r^2 - 2 > 0$, we subtract from $f(x, y)$

$$(2x-y)^2 + (rx+ry)^2.$$

This requires $a \geqq r^2 + 4$ and will be satisfied if

$$2r^2 - 4 \geqq r^2 + 4, \text{ } i.e. \text{ } r^2 \geqq 8.$$

This leaves $r = 2$ and then $h = 2$ for discussion, and has already been disposed of.

Next suppose $h = r^2 - 3 > 0$. We subtract from $f(x, y)$

$$(3x-y)^2 + (rx+ry)^2,$$

This requires $a \geqq r^2 + 9$ and will be satisfied if

$$2r^2 - 6 \geqq r^2 + 9, \quad i.e. \quad r^2 \geqq 15,$$

leaving open $r = 2$, $h = 1$, and $r = 3$, $h = 6$, both already disposed of.

Finally take $h = r^2 - 4$. We subtract from $f(x, y)$

$$(2x - 2y)^2 + (rx + ry)^2.$$

This requires $a \geqq r^2 + 4$ and it suffices if

$$2r^2 - 8 \geqq r^2 + 4, \quad i.e. \quad r^2 \geqq 12$$

leaving $r = 3$, $h = 5$, which has been already considered. Hence in all cases eight squares suffice.

(Eingegangen am 31. Mai 1931.)

Note added September 30th, 1931.

My paper referred to in § 1, § 4 is "The condition for integer solutions of $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$", Journal für die reine und angewandte Mathematik **164** (1931), S. 40—49. See also "Note on the Diophantine Equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$" which I am submitting for publication in the Bulletin of the American Mathematical Society.

In a paper "A new Waring's problem with squares of linear forms", Quarterly Journal of Mathematics **1** (1930), p. 276—288, I show that the necessary and sufficient condition in § 5 for representation as a sum of four squares of linear forms with rational coefficient holds for integer coefficients, and that five squares of linear forms with integer coefficients are necessary and sufficient for the general binary form.

In a forthcoming number of the Journal für die reine und angewandte Mathematik, I give the necessary and sufficient conditions for the representation as a sum of squares of three integral linear forms. Conditions for this have since been published by Wenkov, "Über die Klassenanzahl positiver binärer quadratischer Formen", Mathematische Zeitschrift **33** (1931), S. 351—354.

On the number of circles of curvature perfectly enclosing or perfectly enclosed by a closed convex oval.

Von

R. C. Bose in Kalkutta.

I.

It is known that *the circle of minimum radius meeting an oval in at least three points, is an osculating circle perfectly enclosed by the oval and touching it at no other point except the point of osculation*[1]. *It is natural to investigate the number of osculating circles of this nature.* I shall show that *if s denotes their number, and t the number of circles of triple contact perfectly enclosed by the oval, then there holds the relation*

$$s = t + 2$$

if the oval satisfies appropriate conditions as regards continuity etc. An analogous result holds for osculating circles and circles of triple contact, perfectly enclosing the oval [cf. Section V].

A number of interesting corollaries including some known theorems by Hayashi and Juel are readily deducible from this general result [cf. Section VI].

II.

1. Let r_1 and r_2 be the radii of two circles, the distance between whose centres is d. Then the positive number defined by

$$r = d + r_1 - r_2$$

[1]) A. Hurwitz, Über die Fourierschen konstanten integrierbaren Funktionen, Math. Annalen **57** (1903), S. 444.

W. Blaschke, Kreis und Kugel, S. 116.

S. Ogiwara, On the elliptically curved ovals, Japanese Journal of Mathematics **3** (1926), p. 41.

may be called after Blaschke[2]) the *measure of proximity* of the two circles. It is the least number with the property that given a point P on or to the interior of any one of the circles, then we can always find a point Q on or to the interior of the other circle such that $PQ \leqq \nu$.

2. Given a point P on a closed convex oval, we may call the arc distance OP measured from a fixed origin O on the oval, in an assigned $+ve$ sense, *the parameter* of the point. We may without loss of generality suppose the perimeter of the oval to be 2π, so that the parameters of points on the oval vary from 0 to 2π. We shall find it convenient to denote points on the oval by their parameters. The origin may conventionally be regarded as equivalent to two distinct points 0 and 2π.

The circle through any three points x, y, z on the oval may be called the circle (x, y, z) and its radius may be denoted by $\varrho(x, y, z)$.

3. The closed convex oval studied in this paper shall be assumed to satisfy the following conditions. We state them here once for all and shall not explicitly refer to them hereafter.

(a) *The oval possesses a unique circle of curvature at every point, whose radius lies between finite limits and varies continuously with the point of osculation.*

(b) *The oval possesses only a finite number m of cyclic points.*

From the assumption (a) it follows that $\varrho(x, y, z)$ is a continuous function of x, y, z in the domain $0 \leqq x \leqq 2\pi$, $0 \leqq y \leqq 2\pi$, $0 \leqq z \leqq 2\pi$ and that it always lies in value between the maximum and the minimum radii of curvature[3]) both inclusive.

Again it is easily shown that if $\nu\{(x_0, y_0, z_0), (x, y, z)\}$ denote the measure of proximity of a fixed circle (x_0, y_0, z_0) and a variable circle (x, y, z) then corresponding to any preassigned $+ve$ number ε however small we can find a positive number δ such that

$$\nu\{(x_0, y_0, z_0), (x, y, z)\} < \varepsilon,$$

when $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$, $|z - z_0| < \delta$.

From the assumption (b) it follows that no circle can intersect the oval in more than m points. For if a circle meets the oval in m_1 points $m_1 > m$ then the oval would have from a theorem of Blaschke[4]), at the least m_1 cyclic points. Hence in the terminology of Marchaud the oval has a finite cyclic order[5]) $p \leqq m$.

[2]) W. Blaschke, Kreis und Kugel, S. 60.

[3]) S. Ogiwara, loc. cit.

[4]) W. Blaschke, Kreis und Kugel, S. 161.

[5]) A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné, Acta Mathematica **55**, p. 110.

III.

1. Any circle meeting the oval in at least three and therefore four points, may be called an *incident circle.*

Any circle which has internal (external) contact with the oval at one or more points, but does not cross the oval any where, may be called *a circle of clear incontact* (*excontact*).

If an incident circle of clear incontact (excontact) touches the oval at only a single distinct point, the contact must be four pointic. The circle may in this case be called a *circle of clear incyclic* (*excyclic*) *contact*, and the point of contact a *clear incyclic* (*excyclic*) *point.*

An incident circle of clear incontact (excontact) touching the oval at n *distinct* points $n \geqq 2$ may be said to be a *circle of clear* n-ple *incontact* (*excontact*) with the oval. Since the oval is of finite cyclic order p we must always have $2n \leqq p$.

2. Lemma I. *Every point on the oval is the point of contact of one and only one incident circle of clear incontact.*

Let c be a point on the oval $(0 \leqq c \leqq 2\pi)$. The function $\varrho(c, c, x)$ is a continuous function of x in the interval $(0, 2\pi)$ and consequently attains its lower bound for some point ξ, $0 \leqq \xi \leqq 2\pi$. No point of the oval can be to the interior of the circle (c, c, ξ) for if x_1 is such a point then $\varrho(c, c, x_1) < \varrho(c, c, \xi)$ which is absurd. Hence (c, c, ξ) is an incident circle of clear incontact touching the oval at c. It is clear that there cannot exist two such circles.

3. Any two *distinct* points x and y on the oval, may be said to be *associates* of each other if there can be found an incident circle of clear incontact touching the oval at x and y.

Lemma II. *No associate of any point x on the oval can lie, to the exterior of any incident circle touching the oval at x.*

If y is any associate of x the Lemma follows from the fact that (x, x, y) is the minimum incident circle touching the oval at x.

Lemma III. *If x and y be any two associated points on the oval $(0 \leqq x < y \leqq 2\pi)$ then all the associates of a point ξ of the open interval $(x + 0, y - 0)$ lie in the same open interval, provided ξ itself is not an associate of x or y.*

For let η be an associate of ξ. Since ξ is not an associate of x or y, the circle (ξ, ξ, η) is distinct from (x, x, y). If η lies outside the interval $(x + 0, y - 0)$ these two circles being perfectly enclosed by the oval would intersect in at least four points which is absurd.

IV.

1. We know that the minimum incident circle, is a circle of clear incyclic contact, and its point of contact is therefore a clear incyclic point [cf. Section I]. In what follows we shall choose this point as the origin.

Let y be any associate of x, then y shall be called a *right associate* or a *left associate* of x according as $y > x$ or $x > y$. It should be noted that with the origin chosen as above, the point 0 is to be conventionally regarded as having the right associate 2π and the point 2π as having the left associate 0. Besides these the points 0 and 2π have no other associates.

2. We may divide the points on the oval into four exhaustive and mutually exclusive classes (I), (II), (III), (IV) such that a point x is said to belong to the first, the second, the third or the fourth of these classes according as (I) it has no associate either right or left (II) it has at least one right associate but no left-associate (III) it has at least one left associate but no right associate, (IV) it has at least one right associate and one left associate.

The point 0 belongs to the class (II) and the point 2π to the class (III).

3. Let $R(x)$ be a function of x defined in the interval $(0, 2\pi)$ as follows:

$R(x) = 1$, *if the point* x *of the oval has at least one right associate i e belongs to the class* (II) *or* (IV). *In particular* $R(0) = 1$.

$R(x) = 0$ *if the point* x *of the oval has no right associate i e belongs to the class* (I) *or* (III). *In particular* $R(2\pi) = 0$.

In order to study the question of the existence, and the values of the right and left limits of the function $R(x)$ defined above we shall require the following theorem of S. Mukhopadhyaya [6]).

If any circle meet a convex arc, at four points O_1, O_2, O_3, O_4 *then there must exist a cyclic point on the arc, between the two extreme points* O_1 *and* O_4 *but not coinciding with* O_1 *or* O_4.

As a particular case the point O_2 may coincide with O_1, and O_4 with O_3, so that the circle has double contact with the arc.

4. Lemma IV. *If* x *has at least one associate to the right* $R(x + 0) = 1$.

Of the right associates of x which necessarily form a finite set, let y be the least (or from the Geometrical point of view the nearest to x). Then the interval $(x + 0,\ y - 0)$ will be free from associates of x or y.

[6]) S. Mukhopadhyaya, New Methods in the Geometry of a Plane Arc I, Cyclic and Sextactic points, Bull. Cal. Math. Soc. **1** (1909), p. 32.

Since the set of cyclic points on the oval is finite [cf. Section II], we may choose η such that $x > \eta > y$ and the interval $(x+0, \eta)$ is free from cyclic points. Let ξ be any point of the interval $(x+0, \eta)$, then it must possess at least one associate, for otherwise the incident circle of clear incontact touching the oval at ξ does not touch the oval anywhere else, and ξ is a clear cyclic point, in contradiction to the fact that the interval is free from cyclic points. Also no associate of ξ can lie in the interval $(x+0, \eta)$, for then by the theorem of Mukhopadhyaya cited above the interval $(x+0, \eta)$ would have a cyclic point. Since the interval $(x+0,\ y-0)$ is free from the associates of x and y; ξ cannot be an associate of these points. Hence in consequence of Lemma III, all the associates of ξ lie in the interval $(x+0,\ y-0)$. Therefore ξ has got at least one right associate and $R(\xi) = 1$ for $x < \xi \leqq \eta$. Thus the limit to the right for $R(x)$ exists and is unity.

Corollary. $R(+0) = 1$.

Lemma V. *If x has at least one associate to the left* $R(x \quad 0) = 0$.

The proof is similar to that of Lemma IV.

Corollary. $R(2\pi - 0) = 0$.

5. Lemma VI. *If x has no associate to the right* $R(x+0) = 0$, $(x \neq 2\pi)$.

Let y be the least left associate of x or in case x does not possess any associate even to the left, let y be the point x itself. Then the intervals $(x+0,\ 2\pi)$ and $(0, y-0)$ are free from the associates of x. As in Lemma IV choose η such that $x < \eta < 2\pi$ and the interval $(x+0,\ \eta)$ is free from cyclic points.

Let C be the centre of the circle (x, x, y) and let $f(t)$ denote the distance of any point t on the oval from C. Since $f(t)$ is continuous in in the interval $(\eta, 2\pi)$ and always exceeds $\varrho(x, x, y)$, the lower bound l of $f(t)$ in this interval exceeds $\varrho(x, x, y)$. Thus

$$f(t) \geqq l > \varrho(x, x, y) \quad \text{for} \quad \eta \leqq t \leqq 2\pi. \tag{1}$$

Let $d(x_1)$ denote the distance of the centre of the variable circle (x_1, x_1, y) from the fixed circle (x, x, y). By choosing x_1 sufficiently near to x, we can make the measure of neighbourhood of the two circles as small as we please [cf. Section II paras 1 and 3] so that we can choose δ such that for $x < x_1 \leqq \delta < \eta$

$$|\varrho(x_1, x_1, y) - \varrho(x, x, y)| + d(x_1) < l - \varrho(x, x, y). \tag{2}$$

We shall show that x_1 being a point of the interval $(x+0,\ \delta)$ no point t of the oval lying in the interval $(\eta, 2\pi)$ can lie on or to the interior

of the circle (x_1, x_1, y) for if we suppose to the contrary

$$f(t) < \varrho(x_1, x_1, y) + d(x_1)$$

and this together with (1) and (2) leads to

$$|\varrho(x_1, x_1, y) - \varrho(x, x, y)| < \varrho(x_1, x_1, y) - \varrho(x, x, y)$$

which is absurd.

Again no associate of x_1 can be outside the incident circle (x_1, x_1, y) [cf. Section II Lemma II], consequently no associate of x lies in the interval $(\eta, 2\pi)$ when $x < x_1 \leqq \delta_1 < \eta$. Again it follows as before from the theorem of Mukhopadhyaya cited before that no associate of x_1 can lie within (x_1, η) as this interval is free from cyclic points. Hence x_1 does not possess a right associate and $R(x_1) = 0$ when $x < x_1 \leqq \delta$ consequently $R(x + 0) = 0$.

Lemma VII. *If x has no associate to the left then $R(x - 0) = 1$, $(x \neq 0)$.*

The proof if similar to Lemma VI.

The results of the preceeding four Lemmas can be summed up in the following:

Lemma VIII.

For points of the class I $R(x - 0) = 1, \quad R(x) = R(x + 0) = 0.$

For points of the class II $R(x - 0) = R(x) = R(x + 0) = 1.$

For points of the class III $R(x - 0) = R(x) = R(x + 0) = 0.$

For points of the class IV $R(x - 0) = 0, \quad R(x) = R(x + 0) = 1.$

It follows that the points of the classes (I) and (IV) are the points of discontinuity of the function $R(x)$ and they are the only such points. It also appears incidentally that for every point in $(0, 2\pi)$ excepting 2π we can choose a neighbourhood to the right in which $R(x)$ is constant. Likewise for every point in $(0, 2\pi)$ excepting 0 we can choose a neighbourhood to the left in which $R(x)$ is constant. Consequently the set of points of discontinuity of $R(x)$ has no limiting point and is therefore a finite set. Hence *the number of points in the classes* (I) *and* (IV) *is finite.*

V.

1. Let σ be any incident circle of clear incontact. Then it touches the oval in a finite number of distinct points.

(a) When $n = 1$, σ is a circle of clear incyclic contact, and its point of contact is a clear incyclic point. This point clearly belongs to the class (I) unless σ happens to be the minimum incident circle, in which case the point of contact has been chosen to be the origin, which can be

regarded as equivalent to two points 0 and 2π belonging to the classes (II) and (III) respectively.

(b) When $n = 2$ the circle σ touches the oval in two distinct points x and y for which we may suppose $0 < x < y < 2\pi$. Then x belongs to the class (II) and y to the class (III).

(c) When $n > 2$ let the circle σ touch the oval at the distinct points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ for which we may suppose $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 2\pi$.

Then x belongs to the class (II), x_n to the class (III) and the remaining $n - 2$ points to the class (IV).

If α be the number of points belonging to the class (I) then the case (a) provides us with $\alpha + 1$ circles of clear incyclic contact, and the cases (b) and (c) provide us with no such circle. Again *if every circle of clear n-ple contact for which* $n \geqq 3$ *be reckoned equivalent to* $n - 2$ *circles of clear triple incontact*, then we see that the case (c) provides us with δ circles of clear triple incontact, where δ is the number of points belonging to the class (IV) while the cases (a) and (b) provide us with no such circle. Noting that the cases (a), (b), (c) are exhaustive and mutually exclusive we may state:

If s *and* t *be the number of circles of clear incyclic contact and clear triple incontact respectively, and* α *and* δ *the number of points in the classes* (I) *and* (IV) *respectively*

$$s = \alpha + 1, \quad t = \delta. \tag{1}$$

2. Let $d_1, d_2, \ldots, d_m$, be the points of discontinuity of $R(x)$ where, $0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_m < 2\pi$. Since we have shown that the points of the classes (I) and (IV) are the points of discontinuity of $R(x)$ and that they are the only such points, $m = \alpha + \delta$.

Consider the finite sequence of numbers

$$p_0, p_1, \ldots, p_{2m+1}$$

defined by the relations

$$\left.\begin{aligned} p_{2r} &= R(d_r + 0) \\ p_{2r+1} &= R(d_{r+1} - 0) \end{aligned}\right\} \quad (r = 0, 1, \ldots, m)$$

where d_0 and d_{2m+1} stand for 0 and 2π respectively.

Now $p_{2r} - p_{2r+1} = R(d_r + 0) - R(d_{r+1} - 0) = 0$, $r = 0, 1, 2, \ldots, m)$, since $R(x)$ is continuous in the open interval $(d_r + 0,\ d_{r+1} - 0)$ and it appears from definition that it is constant in any interval in which it is continuous.

Again $p_{2r-1} - p_{2r} = R(d_r - 0) - R(d_r + 0) = \pm 1$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ where the upper or lower sign is to be taken according as d_r belongs to the class (I) or (IV) [cf. Lemma VIII Section IV].

Hence $\sum_{k=0}^{2m}(p_k - p_{k+1}) = \alpha - \delta$, since terms of the type p_{2r} p_{2r+1} contribute nothing to the sum, while of the remaining m terms, α contribute $+1$ and δ contribute -1 each.

Thus

$$p_0 - p_{2m} = \alpha - \delta.$$

But $p_0 = R(+0) = 1$ and $p_{2m+1} = R(2\pi - 0) = 0$ (cf. Corollaries to Lemmas IV and V Section IV]

(2) $$\alpha - \delta = 1.$$

From (1) and (2) it follows at once that

$$s = t + 2.$$

We have thus arrived at the following theorem.

Theorem I. *If s is the number of circles of clear incyclic contact and t the number of circles of clear triple incontact for a closed convex oval, satisfying the conditions* (a) *and* (b) *of Section* II *para* 3, *then*

$$s = t + 2.$$

We may also establish the analogous result for circles of clear excyclic contact, and circles of clear triple excontact by first establishing a corresponding series of Lemmas.

VI.

In the theorem of the previous section t can be at the least 0 so that $s \geqq 2$. Hence we can state

Theorem II. *A closed convex oval perfectly encloses* (*is perfectly enclosed by*) *at least two of its circles of curvature.*

From this we can at once deduce as a corollary the following theorem of Hayashi [7]).

At least two maximum radii of curvature of an oval are not shorter than $L/2\pi$ and at least two of the minimum radii of curvature are not greater than $L/2\pi$, L being the perimeter of the oval.

The following analogues of Hayashi's Theorem are also obivous corollaries from the Theorem II.

(1) *At least two of the minimum radii of curvature are not shorter than $(F/\pi)^{1/2}$ and at least two of the minimum radii of curvature are not longer than $(F/\pi)^{1/2}$ where F is the area of the oval.*

[7]) T. Hayashi, Some geometrical applications of Fourier Series, Rendiconti di Palermo **4** (1926), p. 100.

(2) *At least two of the maximum radii of curvature are not shorter than $D/2$ and at least two of the minimum radii of curvature are not longer than $T/2$ where D is the maximum chord and T is the minimum distance between parallel tangents of the oval.*

The theorem stated at the beginning of this section may also be regarded in a different light.

It is wellknown that every oval has at least four cyclic points [8]). Then the signifiance of the Theorem II is, that *the number 4 is really a minimum number for clear cyclic points which form only a subclass of the class of "cyclic points".*

Ovals which are intersected in utmost four points by a circle, have been called *simple ovals* by C. Juel. For a simple oval the cyclic points must necessarily be clear, and $t = 0$. Hence from the Theorem I viz $s = t + 2$ we obtain C. Juel's Theorem [9]):

Every simple closed convex oval has exactly two excyclic and two incyclic points.

In conclusion I would like to thank Professor Dr. S. Mukhopadhyaya of the Calcutta University for the kind interest taken by him in the preparation of this paper.

---

[8]) S. Mukhopadhyaya, loc. cit., p. 33. Other proofs by: A. Kneser, H. Weber-Festschrift, S. 170—180, Leipzig und Berlin (1912); W. Blaschke, Rendiconti di Palermo **36** (1913), p. 220—222; H. Mohrmann, Rendiconti di Palermo **37** (1914), p. 267—268.

[9]) C. Juel, Om simple cykliske Kurver, Danske Vidensk. Selsk. Skrifter (1911).

(Eingegangen am 8. 10. 1930.)

Eine Verallgemeinerung der konfokalen Flächen zweiter Ordnung.

Von

Werner Vogelsang in Hamburg.

Im dreidimensionalen Riemannschen Raum seien drei zueinander orthogonale Flächenscharen gegeben, und zwar mögen sie als Koordinatenflächen $x^\iota = \text{konst.}$ gewählt werden.

Nun fordere ich:

I. *Die gemeinsamen geodätischen Tangenten je zweier Koordinatenflächen sollen Normalenkongruenzen bilden.*

Oder mit anderen Worten:

Auf $x^\iota = x_0^\iota$ sei eine geodätische Linie gezogen, welche die Schnittkurve $x^\iota = x_0^\iota$, $x^\varkappa = x_0^\varkappa$ berührt. Dann sollen die raumgeodätischen Tangenten jener Flächengeodätischen auch die Fläche $x^\varkappa = x_0^\varkappa$ berühren[1]).

Diese Forderung gestattet, folgende Differentialgleichungen aufzustellen:

$$(1)\quad \begin{cases} (\log g_{11})_{23} - (\log g_{11})_2 (\log g_{11})_3 + (\log g_{11})_2 (\log g_{22})_3 + (\log g_{11})_3 (\log g_{33})_2 = 0, \\ (\log g_{22})_{31} - (\log g_{22})_3 (\log g_{22})_1 + (\log g_{22})_3 (\log g_{33})_1 + (\log g_{22})_1 (\log g_{11})_3 = 0, \\ (\log g_{33})_{12} - (\log g_{33})_1 (\log g_{33})_2 + (\log g_{33})_1 (\log g_{11})_2 + (\log g_{33})_2 (\log g_{22})_1 = 0. \end{cases}$$

Dabei bedeuten die $g_{\iota\iota}$ die Komponenten des Maßtensors und die angehängten Indizes $\varkappa$ Differentiation nach $x^\varkappa$.

Das System (1) ist zu allgemein, als daß sich daraus ein Resultat entnehmen ließe, sondern ich kann nur als Beispiel das Bogenelement von Stäckel angeben:

$$(2)\qquad ds^2 = \begin{vmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ 1 & 1 & 1 \\ U & V & W \end{vmatrix} \left\{ \frac{(dx^1)^2}{W-V} + \frac{(dx^2)^2}{U-W} + \frac{(dx^3)^2}{V-U} \right\},$$

[1]) Die Äquivalenz der beiden Forderungen I ist gezeigt in: C. Carathéodory, Über die Enveloppen der Extremalen eines Feldes in mehrdimensionalen Räumen, *Δέλτιον τῆς Ἑλλην. Μαθημ. Ἑταιρείας* **4** (1923).

wobei

$$U_1 = U_1(x^1), \quad V_1 = V_1(x^2), \quad W_1 = W_1(x^3),$$
$$U = U(x^1), \quad V = V(x^2), \quad W = W(x^3)$$

willkürliche Funktionen je einer Variablen sind.

Die Tatsache, daß der Stäckelraum die Eigenschaft I hat, ist bereits von Herrn W. Blaschke[2]) bewiesen worden, auf dessen Anregung hin auch diese Arbeit entstanden ist.

Ich mache nun eine Einschränkung:

II. *Von den sechs wesentlichen Komponenten des Krümmungstensors* $R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}, R_{1213}, R_{2321}, R_{3132}$ *sollen die drei letzten verschwinden:*

$$R_{1213} = R_{2321} = R_{3132} = 0.$$

Dann gilt

Satz 1. *Auf Grund der Forderungen* I *und* II *hat das Linienelement die spezielle Liouvillesche Gestalt*

$$(3) \quad ds^2 = (X_1 - X_2)(X_1 - X_3)(dx^1)^2 + (X_2 - X_3)(X_2 - X_1)(dx^2)^2 + (X_3 - X_1)(X_3 - X_2)(dx^3)^2,$$

wo X_i *eine willkürliche Funktion von* x^i *allein ist.*

Es liegt nun nahe, nach dem Zusammenhang zwischen den beiden Bogenelementen von Stäckel und Liouville zu fragen. Es ergibt sich:

Satz 2. *Im allgemeinen Riemannschen Raum* ($d.h.$ $R_{\iota\varkappa\lambda\mu} \neq 0$) *ist jedes Bogenelement von der Liouvilleschen Gestalt* (3) *Stäckelsch, aber nicht umgekehrt.*

In Satz 1 steckt ferner das Ergebnis:

Satz 3. *In einem Raum, der* II *erfüllt* ($d.h.$ $R_{1213} = R_{2321} = R_{3132} = 0$), *reduziert sich das Linienelement von Stäckel auf dasjenige von Liouville.*

Das besagt, in diesem Falle gilt von Satz 2 auch die Umkehrung.

Untersuchen wir schließlich noch das Ergebnis für den Euklidischen Raum.

III. $R_{\iota\varkappa\lambda\mu} = 0$.

Zuerst werde ich zeigen, daß hier die Forderung I identisch ist mit der Aussage:

Ia. *Die drei Flächenscharen sollen „scheinbar" orthogonal sein in dem Sinne, daß die von einem beliebigen Punkte ausgehenden Tangentialkegel wieder ein Orthogonalsystem bilden.*

Hierin steckt dann bereits die im allgemeinen vorausgesetzte Orthogonalität der vorgegebenen Flächenscharen.

[2]) W. Blaschke, Eine Verallgemeinerung der Theorie der konfokalen F_2, Math. Zeitschr. **27** (1928), S. 653–668.

Die drei äquivalenten Forderungen I sind für das System der konfokalen Flächen zweiter Ordnung bekannt[3]).

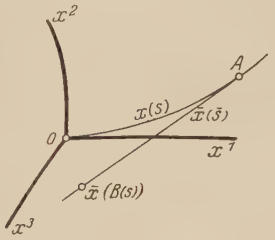
Im Euklidischen Raum gelten ohne weiteres die Sätze 1 und 3, weil III die Einschränkung II in sich schließt, und es wird sich das Resultat ergeben:

Satz 4. *Die einzigen dreifachen Orthogonalsysteme im Euklidischen Raum mit den geforderten Eigenschaften* I *sind die konfokalen Flächen zweiter Ordnung.* Mit anderen Worten: *Die Eigenschaften* I *sind charakteristisch für die konfokalen Flächen zweiter Ordnung.*

§ 1.

Herleitung der Differentialgleichungen (1).

Wir gehen aus von einer geodätischen Linie $x'(s)$ auf der Fläche $x^3 = \text{konst.}$, welche die x^1-Kurve im Punkte O berührt (s. Fig.). O sei als Nullpunkt gewählt. In jedem Punkte A der Flächengeodätischen $x'(s)$ konstruieren wir die raumgeodätische Tangente $\bar{x}^\varkappa(\bar{s})$, welche nach Voraussetzung die Fläche $x^2 = 0$ berührt. s, die Bogenlänge von $x^\iota(s)$, wollen wir von O aus, $\bar{s}$, die Bogenlänge von $\bar{x}^\iota(\bar{s})$, von A aus zählen. Zur Abkürzung führen wir noch ein:



$$\frac{dx^\iota}{ds} = \dot{x}^\iota, \quad \frac{d\bar{x}^\iota}{d\bar{s}} = (\bar{x}^\iota)', \quad \frac{d^2x^\iota}{ds^2} = \ddot{x}^\iota, \quad \frac{d^2\bar{x}^\iota}{d\bar{s}^2} = (\bar{x}^\iota)'', \quad \ldots .$$

Für $x^\iota(s)$ gilt:

$$\ddot{x}^\iota = -\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{2} \Gamma^\iota_{\varkappa\lambda}\dot{x}^\varkappa\dot{x}^\lambda \qquad (i = 1, 2). \tag{4}$$

($\Gamma^\iota_{\varkappa\lambda}$ bedeutet das Christoffelsche Symbol.)

Im Punkte O ist

$$x^\iota(0) = 0; \quad \dot{x}^1(0) = \left\{\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\right\}_0; \quad \dot{x}^2(0) = 0. \tag{5}$$

Aus den Gleichungen (4) ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} x^\lambda(s) &= \dot{x}^\lambda(0)s + \ddot{x}^\lambda(0)\frac{s^2}{2!} + \dddot{x}^\lambda(0)\frac{s^3}{3!} + \ddddot{x}^\lambda(0)\frac{s^4}{4!} + \ldots \\ &= \dot{x}^\lambda(0)s + \{-\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\dot{x}^\iota\dot{x}^\varkappa\}_0\frac{s^2}{2!} + \{-\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa,\nu}\dot{x}^\iota\dot{x}^\varkappa\dot{x}^\nu + 2\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\Gamma^\iota_{\mu\sigma}\dot{x}^\varkappa\dot{x}^\mu\dot{x}^\sigma\}_0\frac{s^3}{3!} \\ &\quad + \{-\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa,\nu\mu}\dot{x}^\iota\dot{x}^\varkappa\dot{x}^\nu\dot{x}^\mu + 4\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa,\varrho}\Gamma^\iota_{\mu\nu}\dot{x}^\varkappa\dot{x}^\varrho\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + 2\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\Gamma^\iota_{\mu\nu,\varrho}\dot{x}^\varkappa\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\varrho \\ &\quad - 4\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\Gamma^\iota_{\mu\nu}\Gamma^\mu_{\varrho\tau}\dot{x}^\varkappa\dot{x}^\nu\dot{x}^\varrho\dot{x}^\tau - 2\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\Gamma^\iota_{\mu\nu}\Gamma^\varkappa_{\varrho\tau}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\dot{x}^\varrho\dot{x}^\tau \\ &\quad + \Gamma^\lambda_{\iota\varkappa,\nu}\Gamma^\nu_{\varrho\tau}\dot{x}^\iota\dot{x}^\varkappa\dot{x}^\varrho\dot{x}^\tau\}_0\frac{s^4}{4!} + \ldots \qquad (\lambda = 1, 2). \end{aligned}$$

[3]) Vgl. etwa F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie, bearbeitet von W. Blaschke. Berlin 1926. S. 19ff.

(Die Summation ist über alle gleichzeitig unten und oben vorkommenden Indizes von 1 bis 2 zu erstrecken. Hinter dem Komma stehende Zeiger sind stets Differentiationsindizes.)

Benutzen wir die Anfangsbedingungen (5), so folgt

$$(7)\quad x^\lambda(s)=\begin{cases}\lambda=1: & \left\{\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\right\}_0\\ \lambda=2: & 0\end{cases} s+\left\{-\Gamma^\lambda_{11}\frac{1}{g_{11}}\right\}_0\frac{s^2}{2!}+\left\{-\Gamma^\lambda_{11,1}\frac{1}{g_{11}\sqrt{g_{11}}}+2\Gamma^\lambda_{\iota 1}\Gamma^\iota_{11}\frac{1}{g_{11}\sqrt{g_{11}}}\right.$$
$$+\left\{-\Gamma^\lambda_{11,11}\frac{1}{g^2_{11}}+4\Gamma^\lambda_{\iota 1,1}\Gamma^\iota_{11}\frac{1}{g^2_{11}}+2\Gamma^\lambda_{\iota 1}\Gamma^\iota_{11,1}\frac{1}{g^2_{11}}-4\Gamma^\lambda_{\iota 1}\Gamma^\iota_{\mu 1}\Gamma^\mu_{11}\frac{1}{g^2_{11}}\right.$$
$$\left.\left.-2\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\Gamma^\iota_{11}\Gamma^\varkappa_{11}\frac{1}{g^2_{11}}+\Gamma^\lambda_{11,\nu}\Gamma^\nu_{11}\frac{1}{g^2_{11}}\right\}_0\frac{s^4}{4!}+\dots$$

($\lambda=1,2$; Summation von 1 bis 2).

Für $\bar{x}^\iota(\bar{s})$ gilt

$$(8)\qquad (\bar{x}^\iota)''=-\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{3}\Gamma^\iota_{\varkappa\lambda}(\bar{x}^\varkappa)'(\bar{x}^\lambda)'\qquad (i=1,2,3).$$

Darum ist:

$$(9)\quad \bar{x}^\lambda(\bar{s})=\bar{x}^\lambda(0)+(\bar{x}^\lambda(0))'\bar{s}+(\bar{x}^\lambda(0))''\frac{\bar{s}^2}{2!}+(\bar{x}^\lambda(0))'''\frac{\bar{s}^3}{3!}+(\bar{x}^\lambda(0))^{\mathrm{IV}}\frac{\bar{s}^4}{4!}+$$
$$=\bar{x}^\lambda(0)+(\bar{x}^\lambda(0))'\bar{s}+\{-\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}(\bar{x}^\iota)'(\bar{x}^\varkappa)'\}_0\frac{\bar{s}^2}{2!}$$
$$+\{-\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa,\nu}(\bar{x}^\iota)'(\bar{x}^\varkappa)'(\bar{x}^\nu)'+2\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\Gamma^\iota_{\mu\sigma}(\bar{x}^\varkappa)'(\bar{x}^\mu)'(\bar{x}^\sigma)'\}_0\frac{\bar{s}^3}{3!}$$
$$+\{-\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa,\nu\mu}(\bar{x}^\iota)'(\bar{x}^\varkappa)'(\bar{x}^\nu)'(\bar{x}^\mu)'+4\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa,\varrho}\Gamma^\iota_{\mu\nu}(\bar{x}^\varkappa)'(\bar{x}^\varrho)'(\bar{x}^\mu)'(\bar{x}^\nu)'$$
$$+2\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\Gamma^\iota_{\mu\nu,\varrho}(\bar{x}^\varkappa)'(\bar{x}^\mu)'(\bar{x}^\nu)'(\bar{x}^\varrho)'-4\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\Gamma^\iota_{\mu\nu}\Gamma^\mu_{\varrho\tau}(\bar{x}^\varkappa)'(\bar{x}^\nu)'(\bar{x}^\varrho)'(\bar{x}^\tau)'$$
$$-2\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\Gamma^\iota_{\mu\nu}\Gamma^\varkappa_{\varrho\tau}(\bar{x}^\mu)'(\bar{x}^\nu)'(\bar{x}^\varrho)'(\bar{x}^\tau)'+\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa,\nu}\Gamma^\nu_{\varrho\tau}(\bar{x}^\iota)'(\bar{x}^\varkappa)'(\bar{x}^\varrho)'(\bar{x}^\tau)'\}_0\frac{\bar{s}^4}{4!}$$

($\lambda=1,2,3$; Summation von 1 bis 3!).

„An der Stelle 0" heißt hier $\bar{s}=0$, also nach Voraussetzung an der Stelle s der Kurve $x^\iota(s)$. $\bar{x}^\iota(\bar{s})$ hängt also auch noch von s ab, deshalb schreiben wir $\bar{x}^\iota(\bar{s};s)$. Die Anfangsbedingungen lauten:

$$(10)\qquad \begin{cases}\bar{x}^1(0;s)=x^1(s); & (\bar{x}^1(0;s))'=\dot{x}^1(s),\\ \bar{x}^2(0;s)=x^2(s); & (\bar{x}^2(0;s))'=\dot{x}^2(s),\\ \bar{x}^3(0;s)=0; & (\bar{x}^3(0;s))'=0.\end{cases}$$

Weil $(\bar{x}^3(0;s))'=0$ ist, sind die meisten vorkommenden Summationen nur von 1 bis 2 zu erstrecken. Deshalb soll im folgenden jede Summation von 1 bis 2 erstreckt werden, sofern nicht ein besonderes Summenzeichen gesetzt ist.

Berücksichtigen wir (10), dann wird aus (9):

$$\bar{x}^\lambda(s;s) = \left\{\begin{array}{ll} \lambda=1: & x^1(s)+\dot{x}^1(s)\,s \\ \lambda=2: & x^2(s)+\dot{x}^2(s)\,s \\ \lambda=3: & 0+0 \end{array}\right\} + \{-\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\dot{x}^\iota(s)\dot{x}^\varkappa(s)\}\frac{s^2}{2!}$$

$$+\{-\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa,\nu}\dot{x}^\iota(s)\dot{x}^\varkappa(s)\dot{x}^\nu(s)+2\sum_{\iota=1}^{3}\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\Gamma^\iota_{\mu\sigma}\dot{x}^\varkappa(s)\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\sigma(s)\}\frac{s^3}{3!}$$

$$+\{-\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa,\nu\mu}\dot{x}^\iota(s)\dot{x}^\varkappa(s)\dot{x}^\nu(s)\dot{x}^\mu(s)+4\sum_{\iota=1}^{3}\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa,\varrho}\Gamma^\iota_{\mu\nu}\dot{x}^\varkappa(s)\dot{x}^\varrho(s)\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s)$$

$$+2\sum_{\iota=1}^{3}\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\Gamma^\iota_{\mu\nu,\varrho}\dot{x}^\varkappa(s)\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s)\dot{x}^\varrho(s)-4\sum_{\iota,\mu=1}^{3}\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\Gamma^\iota_{\mu\nu}\Gamma^\mu_{\varrho\tau}\dot{x}^\varkappa(s)\dot{x}^\nu(s)\dot{x}^\varrho(s)\dot{x}^\tau(s)$$

$$-2\sum_{\iota,\varkappa=1}^{3}\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}\Gamma^\varkappa_{\mu\nu}\Gamma^\nu_{\varrho\tau}\dot{x}^\mu(s)\dot{x}^\nu(s)\dot{x}^\varrho(s)\dot{x}^\tau(s)+\sum_{\nu=1}^{3}\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa,\nu}\Gamma^\nu_{\varrho\tau}\dot{x}^\iota(s)\dot{x}^\varkappa(s)\dot{x}^\varrho(s)\dot{x}^\tau(s)\}\frac{s^4}{4!}+\cdots$$

$$(\lambda=1,2,3).$$

Dabei sind $x^\iota(s)$ und $\dot{x}^\iota(s)$ der Reihenentwicklung (7) zu entnehmen.

Nun soll aber $\bar{x}^\lambda(\bar{s};s)$ die Fläche $x^2=0$ berühren, d. h. für einen bestimmten Wert von $\bar{s}$:

$$\bar{s}=B(s)=\dot{B}(0)\,s+\ddot{B}(0)\,\frac{s^2}{2!}+\cdots \tag{12}$$

muß sowohl $\bar{x}^2(\bar{s};s)$ als auch $(\bar{x}^2(\bar{s};s))'$ gleich Null sein:

$$\bar{x}^2(B(s);s)\equiv 0\,;\qquad (\bar{x}^2(B(s);s))'\equiv 0\,. \tag{13}$$

Also tragen wir (12) in (11) ein und erhalten für $\bar{x}^2(B(s);s)$ und $(\bar{x}^2(B(s);s))'$ Potenzreihen in s, deren Koeffizienten verschwinden müssen.

Beachten wir, daß für unser orthogonales Bogenelement $ds^2=g_{\iota\iota}\,dx^\iota\,dx^\iota$ $\Gamma^\lambda_{\iota\varkappa}=0$ $(\iota\neq\varkappa\neq\lambda)$ ist, so liefern uns die Koeffizienten von s^2 und s^3 von $\bar{x}^2(B(s);s)=0$

$$\dot{B}(0)=-1,$$

der Koeffizient von s^2 von $(\bar{x}^2(B(s);s))'=0$ führt zu $\ddot{B}(0)=0$, der Koeffizient von s^4 von $\bar{x}^2(B(s);s)=0$ zu

$$\Gamma^2_{11,3}+4\,\Gamma^2_{23}\Gamma^2_{11}-4\,\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{31}-2\,\Gamma^2_{33}\Gamma^3_{11}=0\,. \tag{14}$$

Da für das orthogonale Linienelement die Christoffelschen Symbole

$$\left\{\begin{array}{ll} \Gamma^\iota_{\varkappa\lambda}=0, & \Gamma^\iota_{\iota\iota}=\frac{1}{2}(\log g_{\iota\iota})_\iota \\ \Gamma^\iota_{\iota\varkappa}=\frac{1}{2}(\log g_{\iota\iota})_\varkappa, & \Gamma^\iota_{\varkappa\varkappa}=-\frac{g_{\varkappa\varkappa,\iota}}{2\,g_{\iota\iota}} \end{array}\right. \qquad (\iota\neq\varkappa\neq\lambda) \tag{15}$$

werden, wird unter Beachtung der Identität

$$(\log g_{\iota\iota})_{\varkappa\lambda}=\frac{g_{\iota\iota,\varkappa\lambda}}{g_{\iota\iota}}-(\log g_{\iota\iota})_\varkappa(\log g_{\iota\iota})_\lambda \tag{16}$$

aus (14):

$$(17)\quad \begin{cases} (\log g_{11})_{23} - (\log g_{11})_2 (\log g_{11})_3 + (\log g_{11})_2 (\log g_{22})_3 + (\log g_{11})_3 (\log g_{33})_2 \\ \text{Durch zyklische Vertauschung erhalten wir schließlich noch die b} \\ \text{weiteren Gleichungen:} \\ (\log g_{22})_{31} - (\log g_{22})_3 (\log g_{22})_1 + (\log g_{22})_3 (\log g_{33})_1 + (\log g_{22})_1 (\log g_{11})_3 \\ (\log g_{33})_{12} - (\log g_{33})_1 (\log g_{33})_2 + (\log g_{33})_1 (\log g_{11})_2 + (\log g_{33})_2 (\log g_{22})_1 \end{cases}$$

(17) gilt zunächst nur für den Punkt O, dieser ist aber nicht ausgezeichnet, so daß das System (17) allgemein gilt.

Wie wir leicht verifizieren können, sind diese Bedingungen für das Linienelement von Stäckel erfüllt.

§ 2.

Integration der Relationen (17) unter der Einschränkung II.

Um Indizes zu sparen, setzen wir:

$$g_{11} = e,\quad g_{22} = f,\quad g_{33} = g;\qquad x^1 = u,\quad x^2 = v,\quad x^3 = w.$$

In dieser Bezeichnungsweise wird aus (17):

$$(18)\quad \begin{cases} (\log e)_{vw} - (\log e)_v (\log e)_w + (\log e)_v (\log f)_w + (\log e)_w (\log g)_v = 0, \\ (\log f)_{wu} - (\log f)_w (\log f)_u + (\log f)_w (\log g)_u + (\log f)_u (\log e)_w = 0, \\ (\log g)_{uv} - (\log g)_u (\log g)_v + (\log g)_u (\log e)_v + (\log g)_v (\log f)_u = 0. \end{cases}$$

Die Forderung II, d. h.

$$R_{1213} = R_{2321} = R_{3132} = 0,$$

heißt explizit unter Berücksichtigung von (15) und (16):

$$(19)\quad \begin{cases} 2(\log e)_{vw} + (\log e)_v (\log e)_w - (\log e)_v (\log f)_w - (\log e)_w (\log g)_v = 0, \\ 2(\log f)_{wu} + (\log f)_w (\log f)_u - (\log f)_w (\log g)_u - (\log f)_u (\log e)_w = 0, \\ 2(\log g)_{uv} + (\log g)_u (\log g)_v - (\log g)_u (\log e)_v - (\log g)_v (\log f)_u = 0. \end{cases}$$

Durch Addition von $(18)_1$ und $(19)_1$ erhalten wir:

$$(20)\quad \begin{cases} (\log e)_{vw} = 0, \\ \text{analog aus } (18)_2 \text{ und } (19)_2, \text{ bzw. } (18)_3 \text{ und } (19)_3: \\ (\log f)_{wu} = 0, \\ (\log g)_{uv} = 0. \end{cases}$$

Subtrahieren wir von $(19)_1$ das Zweifache von $(18)_1$, so ergibt sich:

$$(21)\quad \begin{cases} -(\log e)_v (\log e)_w + (\log e)_v (\log f)_w + (\log e)_w (\log g)_v = 0; \\ \text{analog aus } (19)_2 \text{ und } (18)_2, \text{ bzw. } (19)_3 \text{ und } (18)_3: \\ -(\log f)_w (\log f)_u + (\log f)_w (\log g)_u + (\log f)_u (\log e)_w = 0, \\ -(\log g)_u (\log g)_v + (\log g)_u (\log e)_v + (\log g)_v (\log f)_u = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (20) besagen folgendes: Z. B. $\log e$ ist die Summe zweier Funktionen, von denen die eine nur von u und v, die andere nur von u und w abhängt, analog $\log f$ und $\log g$, d. h.

$$(22)\qquad e = \Phi^{\mathrm{I}}(uv)\cdot\Phi^{\mathrm{II}}(uw);\qquad f = \Psi^{\mathrm{I}}(vw)\cdot\Psi^{\mathrm{II}}(vu);\qquad g = \chi^{\mathrm{I}}(wu)\cdot\chi^{\mathrm{II}}(wv).$$

Weiter können wir aus (20) entnehmen:

$$(23)\quad \begin{cases} (\log e)_v = \varphi^1(uv); & (\log f)_w = \psi^1(vw); & (\log g)_u = \chi^1(uw), \\ (\log e)_w = \varphi^2(uw); & (\log f)_u = \psi^2(uv); & (\log g)_v = \chi^2(vw). \end{cases}$$

$(21)_1$ und $(21)_2$ schreiben wir jetzt etwas anders:

$$(24)\quad \begin{cases} (\log e)_v\left(\log\dfrac{f}{e}\right)_w + (\log e)_w(\log g)_v = 0, \\ -(\log f)_u\left(\log\dfrac{f}{e}\right)_w + (\log f)_w(\log g)_u = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von $\left(\log\dfrac{f}{e}\right)_w$ bekommen wir:

$$(25)\qquad (\log e)_v(\log f)_w(\log g)_u = -(\log e)_w(\log f)_u(\log g)_v.$$

Jetzt behaupte ich, $(21)_1$ und $(21)_2$ sind bereits eine Folge von $(21)_3$ und (25). Nun, eliminieren wir aus $(21)_3$ und (25) $(\log e)_v$, so ist das Ergebnis gerade $(21)_2$, eliminieren wir aus $(21)_3$ und (25) $(\log g)_u$, so ergibt sich $(21)_1$.

Also genügt es, neben (20) nur $(21)_3$ und (25) zu betrachten.

(23), in (25) eingesetzt, führt zu

$$(26)\qquad \varphi^1(uv)\,\psi^1(vw)\,\chi^1(uw) = -\varphi^2(uw)\,\psi^2(uv)\,\chi^2(vw)$$

oder

$$(27)\qquad \frac{\varphi^1(uv)}{\psi^2(uv)} = -\frac{\varphi^2(uw)\,\chi^2(vw)}{\psi^1(vw)\,\chi^1(uw)}.$$

Die linke Seite ist unabhängig von w, deshalb können wir auf der rechten Seite w beliebig wählen: $w = \text{konst.} = w_0$.

Der gleiche Schluß läßt sich für $\dfrac{\psi^1}{\chi^2}$ und $\dfrac{\chi^1}{\varphi^2}$ machen.

Es ist demnach:

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi^1(uv)}{\psi^2(uv)} = -\dfrac{\varphi^2(uw_0)\,\chi^2(vw_0)}{\psi^1(vw_0)\,\chi^1(uw_0)} = -\dfrac{V_2U_2^*}{U_1^*V_1}, \\ \dfrac{\psi^1(vw)}{\chi^2(vw)} = -\dfrac{\varphi^2(u_0w)\,\psi^2(u_0v)}{\varphi^1(u_0v)\,\chi^1(u_0w)} = -\dfrac{W_2V_2^*}{V_1^*W_1}, \\ \dfrac{\chi^1(uw)}{\varphi^2(uw)} = -\dfrac{\psi^2(uv_0)\,\chi^2(v_0w)}{\varphi^1(uv_0)\,\psi^1(v_0w)} = -\dfrac{U_2W_2^*}{W_1^*U_1}, \end{cases}$$

wobei gesetzt ist:

$$(29)\quad \begin{cases} U_1 = \varphi^1(uv_0); & V_1 = \psi^1(vw_0); & W_1 = \chi^1(wu_0), \\ U_1^* = \chi^1(uw_0); & V_1^* = \varphi^1(vu_0); & W_1^* = \psi^1(wv_0), \\ U_2 = \psi^2(uv_0); & V_2 = \chi^2(vw_0); & W_2 = \varphi^2(wu_0), \\ U_2^* = \varphi^2(uw_0); & V_2^* = \psi^2(vu_0); & W_2^* = \chi^2(wv_0). \end{cases}$$

Wegen (28) dürfen wir schreiben:

$$(30)\quad \begin{cases} \varphi^1(uv) = -V_2U_2^*\varphi(uv); & \psi^1(vw) = -W_2V_2^*\psi(vw); & \chi^1(uw) = -U_2W_2^*\chi \\ \psi^2(uv) = U_1^*V_1\varphi(uv); & \chi^2(vw) = V_1^*W_1\psi(vw); & \varphi^2(uw) = W_1^*U_1\chi \end{cases}$$

Benutzen wir in (25) (30), so gilt

$$(31)\quad U_2U_2^*V_2V_2^*W_2W_2^* = U_1U_1^*V_1V_1^*W_1W_1^*.$$

Bevor wir diese Gleichung auswerten, wenden wir uns zu $(21)_3$:

$$(21)_3\quad (\log g)_v(\log f)_u + (\log g)_u(\log e)_v - (\log g)_u(\log g)_v = 0$$

oder

$$\chi^2\psi^2 + \chi^1\varphi^1 - \chi^1\chi^2 = 0.$$

φ^1 und ψ^2 ersetzen wir durch die Ausdrücke in (30), so wird aus der vorhergehenden Gleichung:

$$\chi^2U_1^*V_1\varphi(uv) - \chi^1V_2U_2^*\varphi(uv) - \chi^1\chi^2 = 0$$

oder, aufgelöst nach $\varphi(uv)$:

$$\varphi(uv) = \frac{\chi^1(uw)\,\chi^2(vw)}{U_1^*V_1\chi^2(vw) - V_2U_2^*\chi^1(uw)};$$

die linke Seite ist von w unabhängig, daher können wir auf der rechten Seite w beliebig wählen, z. B.: $w = w_0$; dann folgt unter Berücksichtigung von (29):

$$(32)_1\quad \varphi(uv) = \frac{\chi^1(uw)\,\chi^2(vw_0)}{U_1^*V_1\chi^2(vw_0) - V_2U_2^*\chi^1(uw_0)} = \frac{U_1^*V_2}{U_1^*V_1V_2 - V_2U_2^*U_1^*} = \frac{1}{V_1 - U_2^*}.$$

In analoger Weise erhalten wir:

$$(32)_2\quad \psi(vw) = \frac{1}{W_1 - V_2^*},$$

$$(32)_3\quad \chi(uw) = \frac{1}{U_1 - W_2^*}.$$

Wegen (30) und (32) wird aus $(21)_3$:

$$(33)\quad \frac{V_1^*W_1U_1^*V_1}{(W_1 - V_2^*)(V_1 - U_2^*)} + \frac{U_2W_2^*V_2U_2^*}{(U_1 - W_2^*)(V_1 - U_2^*)} + \frac{U_2W_2^*V_1^*W_1}{(U_1 - W_2^*)(W_1 - V_2^*)} = 0.$$

(23) hat jetzt folgende Form:

$$(34)\quad \begin{cases} (\log e)_v = -\dfrac{V_2 U_2^*}{V_1 - U_2^*};\ (\log f)_w = -\dfrac{W_2 V_2^*}{W_1 - V_2^*};\ (\log g)_u = -\dfrac{U_2 W_2^*}{U_1 - W_2^*}, \\ (\log e)_w = \dfrac{W_1^* U_1}{U_1 - W_2^*};\ (\log f)_u = \dfrac{U_1^* V_1}{V_1 - U_2^*};\ (\log g)_v = \dfrac{V_1^* W_1}{W_1 - V_2^*}. \end{cases}$$

Wir müssen nun (31) und (33) weiter untersuchen:

$$(31)\quad U_1 U_1^* V_1 V_1^* W_1 W_1^* = U_2 U_2^* V_2 V_2^* W_2 W_2^*,$$

$$(33)\quad \frac{V_1^* W_1 U_1^* V_1}{(W_1 - V_2^*)(V_1 - U_2^*)} + \frac{U_2 W_2^* V_2 U_2^*}{(U_1 - W_2^*)(V_1 - U_2^*)} + \frac{U_2 W_2^* V_1^* W_1}{(U_1 - W_2^*)(W_1 - V_2^*)} = 0.$$

Halten wir darin v und w fest ($v = v_0$; $w = w_0$), so haben wir zwei Gleichungen für die vier Funktionen U_1, U_1^*, U_2, U_2^*, setzen wir $v = v_0$; $u = u_0$; bzw. $u = u_0$; $w = w_0$, so ergeben sich je zwei Bedingungen für die V und W.

Wir können zwei der U, bzw. V, bzw. W durch die beiden anderen U, bzw. V, bzw. W ausdrücken. Es ergibt eine leichte Rechnung:

$$(34)\quad \begin{cases} U_2 = \dfrac{U_1^*}{a_2}(a_1 U_1 + a_2); & U_2^* = \dfrac{U_1}{a_1 U_1 + a_2}, \\ V_2 = \dfrac{V_1^*}{b_2}(b_1 V_1 + b_2); & V_2^* = \dfrac{V_1}{b_1 V_1 + b_2}, \\ W_2 = \dfrac{W_1^*}{c_2}(c_1 W_1 + c_2); & W_2^* = \dfrac{W_1}{c_1 W_1 + c_2}, \end{cases}$$

wo $a_i; b_i; c_i$ Konstante sind.

Setzen wir (34) in (31) ein, so folgt:

$$a_2 b_2 c_2 = 1.$$

Wegen dieser Gleichungen wird aus (34):

$$(35)\quad \begin{cases} (\log e)_v = -\dfrac{V_1^* \dfrac{\{b_1 V_1 + b_2\}}{b_2} \dfrac{U_1}{a_1 U_1 + a_2}}{V_1 - \dfrac{U_1}{a_1 U_1 + a_2}};\ (\log f)_w = -\dfrac{W_1^* \dfrac{\{c_1 W_1 + c_2\}}{c_2} \dfrac{V_1}{b_1 V_1 + b_2}}{W_1 - \dfrac{V_1}{b_1 V_1 + b_2}}; \\ (\log g)_u = -\dfrac{U_1^* \dfrac{\{a_1 U_1 + a_2\}}{a_2} \dfrac{W_1}{c_1 W_1 + c_2}}{U_1 - \dfrac{W_1}{c_1 W_1 + c_2}}, \\ (\log e)_w = -\dfrac{W_1^* U_1}{U_1 - \dfrac{W_1}{c_1 W_1 + c_2}};\ (\log f)_u = \dfrac{U_1^* V_1}{V_1 - \dfrac{U_1}{a_1 U_1 + a_2}};\ (\log g)_v = \dfrac{V_1^* W_1}{W_1 - \dfrac{V_1}{b_1 V_1 + b_2}}. \end{cases}$$

Die Konstanten lassen sich auf folgende Weise bestimmen: Halten wir in $(\log e)_v = \varphi^1(u\,v)$ v fest $(v = v_0)$, so muß sich nach (29) U_1 ergeben:

$$(36) \qquad -\frac{V_1^*(0)\dfrac{\{b_1 V_1(0)+b_2\}}{b_2}\dfrac{U_1}{a_1 U_1+a_2}}{V_1(0)-\dfrac{U_1}{a_1 U_1+a_2}} = U_1.$$

Das muß eine Identität in U_1 sein:

$$-V_1^*(0)\frac{\{b_1 V_1(0)+b_2\}}{b_2} = V_1(0)(a_1 U_1+a_2) - U_1,$$

d. h.

$$(37) \qquad \begin{cases} V_1(0) = \dfrac{1}{a_1}; & V_1^*(0) = -\dfrac{1}{c_2(b_1+a_1 b_2)} \\ \text{und zyklisch vertauscht:} \\ W_1(0) = \dfrac{1}{b_1}; & W_1^*(0) = -\dfrac{1}{a_2(c_1+b_1 c_2)}, \\ U_1(0) = \dfrac{1}{c_1}; & U_1^*(0) = -\dfrac{1}{b_2(a_1-c_1 a_2)}. \end{cases}$$

Halten wir in $(\log e)_v = \varphi^1(u\,v)$ u fest $(u = u_0)$, so muß sich nach (34) V_1^* ergeben:

$$-\frac{V_1^*\dfrac{\{b_1 V_1+b_2\}}{b_2}\dfrac{U_1(0)}{a_1 U_1(0)+a_2}}{V_1-\dfrac{U_1(0)}{a_1 U_1(0)+a_2}} = V_1^*.$$

Dies muß eine Identität in V_1 sein:

$$-\frac{b_1 V_1+b_2}{b_2}\frac{1}{a_1+c_1 a_2} = V_1 - \frac{1}{a_1+c_1 a_2},$$

oder:

$$-\frac{b_1}{b_2(a_1+c_1 a_2)} = 1,$$

zyklisch vertauscht:

$$(38) \qquad -\frac{c_1}{c_2(b_1+a_1 b_2)} = 1,$$

$$-\frac{a_1}{a_2(c_1+b_1 c_2)} = 1.$$

Daraus folgt wegen (37):

$$(39) \qquad U_1^*(0) = \frac{1}{b_1};\ V_1^*(0) = \frac{1}{c_1};\ W_1^*(0) = \frac{1}{a_1}.$$

Nun führen wir drei neue Funktionen U, V, W ein:

$$(40) \qquad U_1 = \frac{1}{V(0)-c_2 U};\ V_1 = \frac{1}{W_0-a_2 V};\ W_1 = \frac{1}{U(0)-b_2 W}.$$

Dann ist:

$$(41)\qquad \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{V_1(0)} = W(0) - a_2 V(0), \\ b_1 = \dfrac{1}{W_1(0)} = U(0) - b_2 W(0), \\ c_1 = \dfrac{1}{U_1(0)} = V(0) - c_2 U(0). \end{cases}$$

Die Bedingung (38) ist dann trivialerweise erfüllt. Mit (40) formen wir (35) um.

Es wird daraus:

$$\begin{cases} (\log e)_v = \dfrac{V_1^*\{c_2 U(0) - V\}}{c_2 U - V}; \quad (\log f)_w = \dfrac{W_1^*\{a_2 V(0) - W\}}{a_2 V - W}; \quad (\log g)_u = \dfrac{U_1^*\{b_2 W(0) - U\}}{b_2 W - U}, \\ (\log e)_w = \dfrac{W_1^*\{a_2 V(0) - W\}}{\dfrac{U}{b_2} - W}; \quad (\log f)_u = \dfrac{U_1^*\{b_2 W(0) - U\}}{\dfrac{V}{c_2} - U}; \quad (\log g)_v = \dfrac{V_1^*\{c_2 U(0) - V\}}{\dfrac{W}{a_2} - V}. \end{cases}$$

Dann transformieren wir noch so, daß wird:

$$(43)\qquad \frac{du}{d\bar{u}} = -\frac{U'}{U_1^*(b_2 W(0) - U)}; \quad \frac{dv}{d\bar{v}} = -\frac{V'}{V_1^*(c_2 U(0) - V)}; \quad \frac{dw}{d\bar{w}} = -\frac{W}{W_1^*(a_2 V(0) - W)}.$$

Dabei multipliziert sich z. B. e mit einer Funktion von u, also tritt zu $\log e$ additiv eine Funktion von u. Da in (42) nach v und w differenziert wird, wird aus $(\log e)_v$: $(\log e)_{\bar{v}} \frac{d\bar{v}}{dv}$ usw.

Nach der Transformation (43) schreibt sich (42):

$$(44)\qquad \begin{cases} (\log e)_{\bar{v}} = -\dfrac{V'}{c_2 U - V}; \quad (\log f)_{\bar{w}} = -\dfrac{W'}{a_2 V - W}; \quad (\log g)_{\bar{u}} = -\dfrac{U'}{b_2 W - U}; \\ (\log e)_{\bar{w}} = -\dfrac{W'}{\dfrac{U}{b_2} - W}; \quad (\log f)_{\bar{u}} = -\dfrac{U'}{\dfrac{V}{c_2} - U}; \quad (\log g)_{\bar{v}} = -\dfrac{V'}{\dfrac{W}{a_2} - V}. \end{cases}$$

Bilden wir nach (22) $(\log e)_v$ und $(\log e)_w$, so gilt:

$$(\log e)_v = (\log \Phi^{\mathrm{I}}(u\,v))_v; \qquad (\log e)_w = (\log \Phi^{\mathrm{II}}(u\,w)_w;$$

analog für f und g.

Aus (44) wird daher, wenn wir noch statt $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ wieder u, v, w schreiben:

$$(45)\qquad \begin{cases} (\log \Phi^{\mathrm{I}}(u\,v))_v = (\log (c_2 U - V))_v, \text{ usw.}, \\ (\log \Phi^{\mathrm{II}}(u\,w)_w = \left(\log \left(\dfrac{U}{b_2} - W\right)\right)_w, \text{ usw.} \end{cases}$$

Folglich ist:

$$\Phi^{\mathrm{I}}(u\,v) = (c_2 U - V)\, U_3; \qquad \Phi^{\mathrm{II}}(u\,w) = \left(\frac{U}{b_2} - W\right) U_4 \text{ usw.}$$

oder:

$$(46)\qquad \begin{cases} e = (c_2 U - V)\left(\dfrac{U}{b_2} - W\right) U_3 \cdot U_4 \\ \quad = (c_2 U - V)(U - b_2 W)\,\overline{U} \text{ mit } \overline{U} = b_2 U_3 U_4, \\ f = (a_2 V - W)(V - c_2 U)\,\overline{V}, \\ g = (b_2 W - U)(W - a_2 V)\,\overline{W}. \end{cases}$$

Dabei sind $\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}$ beliebige Funktionen von u, v bzw. w, und für die Konstanten gilt nach (34) die Beziehung $a_2 b_2 c_2 = 1$.

Wir setzen dann:

$$(47)\qquad U = a_2 U_1 = U_1 \frac{1}{b_2 c_2}; \quad V = \frac{V_1}{b_2}; \quad W = \frac{a_2 W_1}{b_2}.$$

so daß wir für (46) bekommen:

$$(48)\qquad \begin{cases} e = (U_1 - V_1)(U_1 - W_1)\dfrac{a_2}{b_2}\overline{U}, \\ f = (V_1 - W_1)(V_1 - U_1)\dfrac{a_2}{b_2^2}\overline{V}, \\ g = (W_1 - U_1)(W_1 - V_1)\dfrac{a_2^2}{b_2}\overline{W}. \end{cases}$$

Transformieren wir noch so, daß

$$(49)\qquad \frac{a_2}{b_2}\overline{U}\,du^2 = du^{*2}; \quad \frac{a_2}{b_2^2}\overline{V}\,dv^2 = dv^{*2}; \quad \frac{a_2^2}{b_2}\overline{W}\,dw^2 = dw^{*2}$$

wird, schreiben nachträglich wieder u bzw. v bzw. w statt u^*, v^*, w^*, lassen zudem den Index 1 fort, so ist das Ergebnis:

$$(50)\qquad \begin{cases} e = (U - V)(U - W), \\ f = (V - W)(V - U), \\ g = (W - U)(W - V), \end{cases}$$

womit Satz 1 bewiesen ist.

§ 3.

Zusammenhang zwischen den Linienelementen von Stäckel (2) und von Liouville (3).

Das Bogenelement (3)

$$(3)\qquad ds^2 = (U-V)(U-W)\,du^2 + (V-W)(V-U)\,dv^2 + (W-U)(W-V)\,dw^2$$

läßt sich, wie man leicht verifiziert, folgendermaßen schreiben:

$$(51)\qquad ds^2 = \begin{vmatrix} U^2 & V^2 & W^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ U & V & W \end{vmatrix} \left\{ \frac{du^2}{W-V} + \frac{dv^2}{U-W} + \frac{dw^2}{V-U} \right\},$$

ist demnach ein spezieller Fall des ds^2 von Stäckel:

$$(2) \qquad ds^2 = \begin{vmatrix} U_1 & V_1 & W_1 \\ 1 & 1 & 1 \\ U & V & W \end{vmatrix} \left\{ \frac{du^2}{W-V} + \frac{dv^2}{U-W} + \frac{dw^2}{V-U} \right\},$$

nämlich der, wo $U_1 = U^2$, $V_1 = V^2$, $W_1 = W^2$.

Es ist offensichtlich, daß wir durchaus nicht immer (2) auf die Form (3) bringen können. Damit haben wir Satz 2.

Machen wir nun die Einschränkung II.

Dann müssen für das Linienelement von Stäckel, da dieses nach einer Bemerkung am Schluß von § 1 den Beziehungen (18) genügt, auch noch als Folge der Einschränkung II oder (19) auch die Gleichungen (20) und (21) gelten, d. h. aber gerade, das Linienelement von Stäckel (2) reduziert sich auf dasjenige von Liouville, auf (3), wie in Satz 3 behauptet war.

Dies Resultat ließe sich natürlich auch ohne die lange, an (20) und (21) anknüpfende Zwischenrechnung herleiten, indem wir einfach die Relationen (20) und (21) für (2) ansetzen.

§ 4.

Untersuchung der Gleichungen (17) im Euklidischen Raum.

Im Euklidischen Raum können wir noch statt I die Forderung Ia stellen. Dem Äquivalenzbeweis sei einiges vorausgeschickt.

Sollen die gemeinsamen Tangenten Normalsysteme bilden, so besagt das geometrisch:

Die Normalen auf den Brennflächen (d. h. hier auf den vorgegebenen Flächen) in den beiden Berührungspunkten einer solchen Tangente stehen aufeinander senkrecht.

Ferner sei erwähnt, daß die Tangentenebenen der Umhüllungskegel auch solche der vorgegebenen Flächen sind.

Nun seien die gemeinsamen Tangenten zweier Flächen Normalensysteme, dann denken wir uns von einem beliebigen Punkte aus die Umhüllungskegel dargestellt. Die Schnittlinien zweier Kegel sind dann gemeinsame Tangenten zweier vorgegebener Flächen, also stehen in den Berührungspunkten nach Voraussetzung die Tangentenebenen aufeinander senkrecht. Das sind aber zugleich die Tangentenebenen der Kegel, d. h. die Kegel sind zueinander orthogonal, wie behauptet.

Diese Schlußweise ist in leicht ersichtlicher Art umzukehren, w. z. b. w. In derselben Art ließe sich auch rein geometrisch die Gleichwertigkeit der anderen Formulierungen von I angeben.

Die Forderung Ia soll für jeden Punkt gelten, speziell auch für einen Schnittpunkt dreier Flächen, wo die Kegel in die Tangentenebenen entarten, d. h. die Flächen stehen aufeinander senkrecht. Die Voraussetzung der Orthogonalität der Flächenscharen ist also in diesem Falle bereits in I enthalten.

Die neue Voraussetzung, $R_{i\varkappa\lambda\mu} = 0$, enthält natürlich die Einschränkung II, d. h. es gelten ohne weiteres die Sätze 1 und 3.

Die neu hinzugekommenen Bedingungen

$$R_{1212} = R_{1313} = R_{2323} = 0$$

würden uns nun gestatten, (3) auf das Bogenelement der konfokalen Flächen zweiter Ordnung zurückzuführen. Aber wir können uns diese etwas umständliche Rechnung sparen; denn Herr W. Blaschke hat bereits in der oben zitierten Arbeit gezeigt, daß die einzigen dreifachen Orthogonalsysteme Stäckels im Euklidischen Raum die konfokalen F_2 sind. Damit ist denn auch Satz 4 bewiesen.

(Eingegangen am 12. Januar 1931.)

Über die Verteilung der Potenzreste.

Von

Alfred Brauer in Berlin.

In meiner Arbeit „Über Sequenzen von Potenzresten“ [1]) habe ich den folgenden Satz bewiesen: Für alle positiven ganzen Zahlen k und l läßt sich eine nur von k und l abhängende Konstante $N(k, l)$ angeben, derart, daß für alle Primzahlen $p > N(k, l)$, $\{p \equiv 1 \pmod{k}\}$, es stets l aufeinander folgende Zahlen gibt, die sämtlich k-te Potenzreste $(\mathrm{mod}\ p)$ sind; für $p > N(k, l)$ existieren also stets Sequenzen der Länge l von k-ten Potenzresten. Ferner habe ich dort gezeigt, daß mindestens eine der $k-1$ Klassen, in die die k-ten Nichtreste für $p \equiv 1 \pmod{k}$ zerfallen, eine Sequenz der Länge l enthält[1a]), wenn p größer als eine nur von k und l abhängende Konstante $N_1(k, l)$ ist. Für das Maximum der Längen der für eine feste Primzahl p auftretenden Sequenzen von k-ten Potenzresten und k-ten Nichtresten erhält man so eine, wenn auch sehr schlechte, Abschätzung nach unten.

Es soll hier die umgekehrte Frage behandelt werden, nämlich bei festem p eine Abschätzung für die Maximallänge der Sequenzen nach oben zu erhalten. Eine solche ergibt sich sofort aus dem folgenden Satz von Herrn I. Schur [2]): Ist $\chi(n)$ ein eigentlicher Charakter $(\mathrm{mod}\ p)$, so ist für alle a und b

$$\left| \sum_{n=a}^{b} \chi(n) \right| < \sqrt{p} \log p.$$

[1]) Sitzungsberichte d. Preußischen Akademie d. Wissenschaften 1928, S. 9—16.

[1a]) Zusatz bei der Korrektur: Inzwischen habe ich gezeigt, daß dies für jede der $k-1$ Klassen der Nichtreste gilt (Über Sequenzen von Potenzresten II, Sitzungsberichte d. Preußischen Akademie d. Wissenschaften 1931, S. 329—341).

[2]) Einige Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit des Herrn G. Pólya: Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste, Göttinger Nachrichten 1918, S. 30—36.

Betrachtet man nämlich für $p \equiv 1 \pmod{k}$ die in jeder der k Klassen auftretenden Sequenzen und bezeichnet mit l das Maximum ihrer Längen, so folgt

$$l < \sqrt{p} \log p.$$

Ist speziell $k = 2$ und bezeichnet l_r die Maximallänge der Sequenzen quadratischer Reste, l_n diejenige der Sequenzen der quadratischen Nichtreste $(\mathrm{mod}\ p)$, so ergibt sich für l_n sofort eine bessere Abschätzung. Da nämlich die Entfernung zweier benachbarter Quadratzahlen unterhalb p stets kleiner als $2\sqrt{p} - 1$ und eine Sequenz von Nichtresten keine Quadratzahl enthalten kann, folgt sofort

$$l_n < 2\sqrt{p} - 2.$$

Für die Primzahlen der Form $4n - 1$ gilt dann auch

$$l_r < 2\sqrt{p} - 2,$$

da jeder Sequenz von Nichtresten eine ebenso lange Sequenz von Resten entspricht. Für die Primzahlen der Form $4n + 1$ entspricht jeder Sequenz von Nichtresten oberhalb $\frac{p}{2}$ eine ebenso lange Sequenz von Nichtresten unterhalb $\frac{p}{2}$; da die Entfernung einer unterhalb $\frac{p}{2}$ gelegenen Quadratzahl von der nächst größeren Quadratzahl kleiner als $2\sqrt{\frac{p}{2}} + 1$ ist, folgt hier

$$l_n < \sqrt{2p}.$$

Dagegen erhält man hier für l_r auf diesem Wege keine Abschätzung.

Im folgenden sollen nun diese Abschätzungen, zugleich für beliebiges k, verschärft werden. Insbesondere wird gezeigt werden:

Ist l die Maximallänge der in den k Klassen der k-ten Potenzreste und Nichtreste $(\mathrm{mod}\ p)$, $\{p \equiv 1 \pmod{k}\}$, auftretenden Sequenzen, so ist

$$l < \sqrt{2p} + 2. \tag{1}$$

In $k - 1$ dieser k Klassen können nur Sequenzen auftreten, deren Längen kleiner als $\sqrt{p}$ sind.

Hieraus folgt für $k = 2$ und die Primzahlen p der Form $4n - 1$:

$$l \leqq [\sqrt{p}].$$

Daß tatsächlich $l = [\sqrt{p}]$ sein kann, zeigen die Beispiele $p = 3, 7, 19, 23$. Für Primzahlen der Form $4n + 1$ kann $l > [\sqrt{p}]$ sein, wie das Beispiel $p = 13$ zeigt.

Genügt ferner der kleinste k-te Nichtrest d $(\mathrm{mod}\ p)$ der Bedingung

$$d < \sqrt{2}\sqrt[4]{p},$$

so gilt statt (1) die für $p > 200$ schärfere Abschätzung

$$l < \sqrt{p} + \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 2.$$

Insbesondere gilt diese Abschätzung für $k > 4$ und alle hinreichend großen Primzahlen p.

Schließlich wird gezeigt, daß auch für $k \leqq 4$ und alle hinreichend großen Primzahlen p die Ungleichung (1) sich verschärfen läßt.

Es soll zunächst der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 1. *Enthält für* $p \equiv 1 \pmod{k}$ *eine der* k *Klassen der* k*-ten Potenzreste und Nichtreste* $\pmod{p}$ *eine Sequenz der Länge* $l > \sqrt{p}$, *so sind die Zahlen*

$$\left[\frac{p}{l}\right]+1,\ \left[\frac{p}{l}\right]+2,\ \ldots,\ l$$

sämtlich k*-te Potenzreste.*

Beweis. Es sei

$$a,\ a+1,\ \ldots,\ a+l-1 \tag{2}$$

eine Sequenz von Zahlen der Klasse $\mathfrak{R}$; ferner sei

$$\left[\frac{p}{l}\right]+1 \leqq z \leqq l. \tag{3}$$

Man betrachte die Zahlen

$$az,\ (a+1)z,\ \ldots,\ (a+l-1)z \tag{4}$$

und reduziere sie mod p; dann teilen diese l reduzierten Zahlen das Intervall $\{0 \ldots p\}$ in Teilintervalle. Da die Entfernung zweier benachbarter der Zahlen (4) gleich z ist, sind wegen

$$lz \geqq l\left(\left[\frac{p}{l}\right]+1\right) > l\,\frac{p}{l} = p$$

die Längen der $l+1$ Teilintervalle kleiner oder gleich z. Daher ist von je z aufeinanderfolgenden Zahlen mindestens eine einer der Zahlen (4) $(\mathrm{mod}\ p)$ kongruent. Nach (3) ist $z \leqq l$, folglich ist mindestens eine der l Zahlen (2) einer der Zahlen (4) $(\mathrm{mod}\ p)$ kongruent. Da die Zahlen (2) sämtlich zur Klasse $\mathfrak{R}$ gehörten, gehören also die Zahlen (4) auch zur Klasse $\mathfrak{R}$. Daher ist z ein k-ter Potenzrest.

Damit ist Satz 1 bewiesen, er läßt sich auch folgendermaßen formulieren:

Liegt für $c > \sqrt{p}$ *im Intervall*[3] $\left\{\left[\frac{p}{c}\right]+1 \ldots c\right\}$ *ein* k*-ter Nichtrest, so ist die Maximallänge* l *der in den* k *Klassen auftretenden Sequenzen*

$$l < c.$$

Bevor nun ein c so bestimmt wird, daß im Intervall $\left\{\left[\frac{p}{c}\right]-1 \ldots c\right\}$ stets ein k-ter Nichtrest liegt, soll aus dem Satz 1 erst ein anderes Resultat hergeleitet werden.

[3]) Hier und im folgenden wird unter Intervall stets das abgeschlossene Intervall verstanden.

Satz 2. *Enthält für* $p \equiv 1 \pmod{k}$ *eine der* k *Klassen der* k*-ten Potenzreste und Nichtreste eine Sequenz der Länge* $l > \sqrt{p}$, *so liegen in den übrigen Klassen nur Sequenzen, deren Längen kleiner als* $\frac{p}{l}$ *sind.*

Beweis. Es sei wieder

$$a,\ a+1, \ldots, a+l-1$$

eine Sequenz von l Zahlen der Klasse $\mathfrak{K}$. Setzt man

$$z = \left[\frac{p}{l}\right] + 1,$$

so ist nach Satz 1 die Zahl z ein k-ter Potenzrest, die Zahlen

$$az,\ (a+1)z, \ldots, (a+l-1)z$$

der Klasse $\mathfrak{K}$ zerlegen, mod p betrachtet, das Intervall $\{0 \ldots p\}$ in Teilintervalle, deren Längen kleiner oder gleich z sind. Daher können die $k-1$ von $\mathfrak{K}$ verschiedenen Klassen nur Sequenzen enthalten, deren Länge

$$\lambda \leqq z - 1 = \left[\frac{p}{l}\right]$$

ist.

Folgerung 1. *Höchstens eine der* k *Klassen enthält eine Sequenz, deren Länge* $l > \sqrt{p}$ *ist.*

Folgerung 2. *Für Primzahlen der Form* $4n-1$ *ist die Maximallänge* l *der Sequenzen quadratischer Reste und Nichtreste*

$$l < \sqrt{p}.$$

Es soll nun eine Zahl $c > \sqrt{p}$ bestimmt werden, derart, daß im Intervall $\left\{\left[\frac{p}{c}\right]+1 \ldots c\right\}$ stets ein k-ter Nichtrest liegt.

Hilfssatz. *Ist die Zahl* 2 *ein* k*-ter Potenzrest* $(\bmod p)$, $\{p \equiv 1 \pmod{k}\}$, *so liegt im Intervall* $\{\frac{1}{2}\sqrt{2p} \ldots \sqrt{2p}\}$ *stets ein* k*-ter Nichtrest.*

Beweis. Für $p = 3$ ist nichts zu beweisen. Für gerades k und $p = 7$ und 23 ergibt sich die Behauptung direkt, da $(\frac{3}{7}) = -1$ und $(\frac{5}{23}) = -1$ und ein quadratischer Nichtrest zugleich ein k-ter Nichtrest ist, wenn k gerade ist.

Es sei also im folgenden k ungerade oder k gerade und $p \neq 3, 7, 23$.

Ist dann d der kleinste k-te Nichtrest, so wird behauptet:

$$d < \sqrt{p}. \tag{5}$$

Für $k = 2$ und $p \neq 3, 7, 23$ ist diese Ungleichung bekanntlich [4]) erfüllt;

[4]) Vgl. hierzu A. Brauer, Über den kleinsten quadratischen Nichtrest, Math. Zeitschr. **33** (1931), S. 161–176. Aus dem Satz 1 dieser Arbeit folgt die Richtigkeit der Behauptung (5) für die Primzahlen der Form $p = 8n+7$, für $p = 8n \pm 3$ ist die Behauptung trivial und für $p = 8n+1$ verläuft der Beweis z. B. ebenso wie der im folgenden für ungerades k gegebene Beweis.

sie gilt daher auch für jedes gerade k. Für ungerades k ist $-1=(-1)^k$ ein k-ter Potenzrest, folglich sind die Zahlen $p-d+1$, $p-d+2$, ..., $p-1$ sämtlich k-te Potenzreste. Ist also md das im Intervall $\{p-d+1 \dots p-1\}$ gelegene ganzzahlige Multiplum von d, so ist md Rest, folglich m Nichtrest. Daher ist $d \leqq m$, also

$$d^2 \leqq md < p,$$
$$d < \sqrt{p}.$$

Die Ungleichung (5) gilt also auch für ungerades k und alle p.[5]) Wegen (5) ist erst recht

$$d < \sqrt{2p}.$$

Entweder liegt nun d selbst schon im Intervall $\{\frac{1}{2}\sqrt{2p} \dots \sqrt{2p}\}$ oder es ist $d < \frac{1}{2}\sqrt{2p}$; im letzteren Falle gibt es eine positive ganze Zahl ϱ, derart, daß $2^\varrho d$ im Intervall $\{\frac{1}{2}\sqrt{2p} \dots \sqrt{2p}\}$ liegt. Dieses Intervall enthält daher, da 2 Rest ist, in beiden Fällen sicher einen Nichtrest.

Aus dem Hilfssatz und Satz 1 folgt für $c=\sqrt{2p}$

Satz 3. *Es sei* $p \equiv 1 \pmod{k}$. *Ist dann* 2 *ein* k*-ter Potenzrest* $\pmod{p}$, *so ist die Maximallänge* l *der in den* k *Klassen von* k*-ten Potenzresten und Nichtresten auftretenden Sequenzen*

$$l < \sqrt{2p}.$$

Ist dagegen 2 ein k-ter Nichtrest, so erhält man eine ähnliche Abschätzung sofort. Dann gehören nämlich die beiden Zahlen $[\frac{1}{2}\sqrt{2p}]+1$ und $2[\frac{1}{2}\sqrt{2p}]+2$ zu verschiedenen Klassen, also ist mindestens eine von ihnen ein k-ter Nichtrest. Wegen

$$2\left[\frac{1}{2}\sqrt{2p}\right]+2 < \sqrt{2p}+2$$

und

$$\left[\frac{p}{\sqrt{2p}+2}\right]+1 \leqq \left[\frac{1}{2}\sqrt{2p}\right]+1$$

liegt daher im Intervall $\left\{\left[\frac{p}{\sqrt{2p}+2}\right]+1 \dots \sqrt{2p}+2\right\}$ stets ein k-ter Nichtrest. Daher folgt aus Satz 1:

Satz 3a. *Es sei* $p \equiv 1 \pmod{k}$. *Ist dann* 2 *ein* k*-ter Nichtrest* $\pmod{p}$, *so ist*

$$l < \sqrt{2p}+2.$$

[5]) Für hinreichend große p hat Herr J. M. Winogradoff eine sehr viel bessere Abschätzung für den kleinsten k-ten Nichtrest bewiesen (On the bound of the least non residue of n-th powers, Transact. of the Americ. Math. Soc. **29** (1927), S. 218—226).

Die Sätze 3 und 3a lassen sich noch verschärfen; es gilt

Satz 4. *Genügt der kleinste k-te Nichtrest $d \pmod p$, $\{p \equiv 1 \pmod k\}$, der Bedingung*

$$d < \sqrt{2}\sqrt[4]{p},$$

so ist

$$l < \sqrt{p} + \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 2.$$

Beweis. Für $p = 3$ ist nichts zu beweisen, da $\sqrt{2}\sqrt[4]{3} < 2$ ist. Für $p \geqq 5$ ist $[\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}] > 0$.

Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß für $d < \sqrt{2}\sqrt[4]{p}$ im Intervall

$$A = \left\{\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}\right] \ldots \sqrt{2}\sqrt[4]{p}\right\}$$

stets mindestens zwei aufeinanderfolgende Zahlen liegen, die zu verschiedenen Klassen gehören. Man muß hierbei zwei Fälle unterscheiden:

1. Es sei 2 ein k-ter Nichtrest $(\mathrm{mod}\, p)$. Dann gehören die beiden Zahlen $[\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}]$ und $2[\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}]$ zu verschiedenen Klassen, folglich gibt es im Intervall A auch zwei aufeinanderfolgende Zahlen, die zu verschiedenen Klassen gehören.

2. Ist dagegen 2 ein k-ter Potenzrest $(\mathrm{mod}\, p)$, so ist entweder

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} < d < \sqrt{2}\sqrt[4]{p},$$

oder es ist

$$d < \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}.$$

Im letzteren Falle läßt sich eine ganze Zahl ϱ so angeben, daß

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} < 2^{\varrho} d < \sqrt{2}\sqrt[4]{p}$$

ist. Da 2 Rest ist, ist $2^{\varrho} d$ Nichtrest. Daher liegt im Intervall A entweder schon der Nichtrest d oder der Nichtrest $2^{\varrho} d$.

Andererseits liegt im Intervall A stets eine Potenz von 2, also ein k-ter Potenzrest. Daher liegen auch in diesem Falle in A zwei Zahlen aus verschiedenen Klassen, folglich auch zwei aufeinanderfolgende Zahlen aus verschiedenen Klassen.

Sind nun b und $b+1$ zwei solche Zahlen, so ist in beiden Fällen

$$\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}\right] \leqq b < b+1 < \sqrt{2}\sqrt[4]{p}, \tag{6}$$

und es gehören für jedes ganzzahlige $\varkappa \not\equiv 0 \pmod p$ die Zahlen $\varkappa b$ und $\varkappa(b+1)$ zu verschiedenen Klassen. Es sei nun

$$a, a+1, \ldots, a+\lambda-1 \tag{7}$$

eine Sequenz von λ Zahlen einer Klasse, und es sei hierbei

$$1 \leqq a < \sqrt{p} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}. \tag{8}$$

Man bestimme nun die positive ganze Zahl $\varkappa$ so, daß

$$a = (\varkappa - 1)b + \alpha \tag{9}$$

ist, wo α der Bedingung

$$1 \leqq \alpha \leqq b \tag{10}$$

genügt.

Angenommen, es sei nun

$$\lambda \geqq \left[\frac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}\right] + 1, \tag{11}$$

dann wäre wegen (8), (9) und (10)

$$(\varkappa - 1)b \leqq a - 1 < \sqrt{p} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} - 1,$$

$$\varkappa < \frac{\sqrt{p} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} - 1}{b} + 1,$$

$$\varkappa + b < \frac{\sqrt{p} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} - 1}{b} + b + 1. \tag{12}$$

Setzt man

$$\frac{\sqrt{p} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} - 1}{b} + b = f(b), \tag{13}$$

so ist $f(b)$ im Intervall $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} - 1 \ldots \sqrt{2}\sqrt[4]{p}\right\}$ nach unten konvex.

Für die Endpunkte des Intervalls erhält man

$$f(\sqrt{2}\sqrt[4]{p}) = \frac{\sqrt{p} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} - 1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{p}} + \sqrt{2}\sqrt[4]{p} < \frac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} - 1\right) = \frac{(\sqrt{p} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} - 1)\sqrt{2}}{\sqrt[4]{p} - \sqrt{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} - 1$$

$$= \frac{(\sqrt[4]{p} - \sqrt{2})(\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 1)}{\sqrt[4]{p} - \sqrt{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} - 1 = \frac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}.$$

Daher ist im ganzen Intervall $\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} - 1 \ldots \sqrt{2}\sqrt[4]{p}\}$

$$f(b) \leqq \frac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}, \tag{14}$$

folglich wegen (6), (12) und (13)

$$\varkappa + b < \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 1,$$

$$\varkappa \leqq \left[\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}\right] - b + 1,$$

$$\varkappa b + \varkappa \leqq \varkappa b + \left[\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}\right] - b + 1.$$

Aus (9), (10) und (11) würde daher folgen

$$a \leqq \varkappa b < \varkappa(b+1) \leqq \varkappa b - b + \left[\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}\right] + 1 \leqq a - \alpha + \lambda \leqq a + \lambda - 1.$$

Also wären $\varkappa b$ und $\varkappa(b+1)$ Zahlen der Sequenz (7); dies ist aber unmöglich, da $\varkappa b$ und $\varkappa(b+1)$ zu verschiedenen Klassen gehörten. Die Annahme (11) ist daher unmöglich, und es ist

$$\lambda < \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}. \tag{15}$$

Die Länge λ einer Sequenz, deren Anfangsglied a unterhalb $\sqrt{p} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}$ liegt, ist also kleiner als $\frac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}$.

Gäbe es nun im ganzen Intervall $\{0 \dots p\}$ eine Sequenz der Länge

$$l > \sqrt{p} + \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 2, \tag{16}$$

so wären nach Satz 1 die Zahlen

$$\left[\frac{p}{\sqrt{p} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 2}\right] + 1, \quad \left[\frac{p}{\sqrt{p} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 2}\right] + 2, \dots, \tag{17}$$

$$\left[\sqrt{p} + \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} - 2\right]$$

sämtlich k-te Potenzreste. Nun ist für $p > 36$

$$\left(\sqrt{p} + \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 2\right)\left(\sqrt{p} - \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}\right) = p + \tfrac{7}{8}\sqrt{p} - \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} > p,$$

folglich ist für $p > 36$

$$\left[\frac{p}{\sqrt{p} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 2}\right] < \sqrt{p} - \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}. \tag{18}$$

Ist daher λ_0 die Anzahl der ganzen Zahlen im Intervall

$$\left\{\left[\frac{p}{\sqrt{p} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 2}\right] + 1 \dots \left[\sqrt{p} + \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 2\right]\right\},$$

so ist

$$\lambda_0 > \sqrt{p} + \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 1 - \left(\sqrt{p} - \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 1\right) = \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}.$$

Die Zahlen (17) würden also eine Sequenz von k-ten Potenzresten der Länge λ_0 bilden, wo

$$\lambda_0 > \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} \tag{19}$$

ist. Für $p > 64$ ist nun wegen (18) das Anfangsglied dieser Sequenz

$$\left[\frac{p}{\sqrt{p}+\frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}+2}\right]+1 < \sqrt{p}-\tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}+1 < \sqrt{p}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p};$$

die Bedingung (8) ist also erfüllt. Daher folgt nach (15) für $p > 64$

$$\lambda_0 < \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}.$$

Dies steht im Widerspruch zu (19). Für $p > 64$ ist also die Ungleichung (16) unmöglich.

Daß sie auch für $p < 64$ unmöglich ist, erkennt man leicht direkt. Folglich gilt allgemein

$$l < \sqrt{p} + \tfrac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[4]{p} + 2.$$

Damit ist Satz 4 bewiesen.

Die Voraussetzungen des Satzes 4 sind insbesondere für $k > 4$ und alle hinreichend großen Primzahlen p erfüllt. Denn nach einem Satz des Herrn J. M. Winogradoff[6]) genügt in diesen Fällen der kleinste k-te Nichtrest d der Bedingung

$$d < p^{\left(2e^{\frac{4}{5}}\right)^{-1}} \log^2 p < O\left(p^{\frac{1}{4,4}}\right).$$

Man kann den Satz 4 durch mehrmalige Anwendung derselben Methode noch etwas verschärfen, falls der kleinste k-te Nichtrest d der schärferen Ungleichung

$$d < \sqrt{2}\, p^{\frac{1}{8}}$$

genügt. Ersetzt man nämlich dann im ersten Teil des Beweises $\sqrt{p}$ durch $\sqrt[4]{p}$, so folgt aus (15):

Ist λ_1 die Länge einer Sequenz, deren Anfangsglied unterhalb $\sqrt[4]{p} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[8]{p}$ liegt, so ist

$$\lambda_1 < \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[8]{p}. \tag{20}$$

Daher kann man beim obigen Beweise statt des Intervalls

$$\left\{\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt[4]{p}\right] \ldots \sqrt{2}\sqrt[4]{p}\right\}, \tag{21}$$

---

[6]) A. a. O. [5]) Theorem I.

in dem nach (6) b und $b+1$ lagen, das für hinreichend große p im Innern von (21) gelegene Intervall

$$\left\{\sqrt[4]{p} - \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[8]{p} \dots \sqrt[4]{p} + \frac{3}{4}\sqrt{2}\sqrt[8]{p}\right\} \tag{22}$$

betrachten; denn in diesem Intervall der Länge $\frac{3}{2}\sqrt{2}\sqrt[8]{p}$ liegen wegen (20) zwei Zahlen aus verschiedenen Klassen. Man braucht also die Funktion $f(b)$ nur in dem kleineren Intervall (22) zu betrachten; folglich erhält man statt (14) eine bessere Abschätzung für $f(b)$ und demnach statt (15) eine bessere Abschätzung für λ_0. Hieraus folgt nun wieder, daß auch die Abschätzung (20) sich verbessern läßt. Man kann dies Verfahren wiederholen, falls

$$d < \sqrt{2}\, p^{\frac{1}{16}}$$

ist, usw.; hierauf soll jedoch nicht näher eingegangen werden.

Es soll nun gezeigt werden, daß sich der Satz 3 auch für $k \leqq 4$ und alle hinreichend großen Primzahlen p verschärfen läßt.

Satz 5. *Für ein festes k und eine feste Menge $\mathfrak{P}$ von Primzahlen p, für die $p \equiv 1 \pmod{k}$ ist, genüge der kleinste k-te Nichtrest d der Bedingung*

$$2 < d \leqq g(p), \tag{23}$$

wo

$$g(p) \geqq \sqrt{2}\sqrt[4]{p} \tag{24}$$

und

$$g(p) = o(\sqrt{p}) \tag{25}$$

ist. Dann läßt sich nach Wahl einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine nur von ε und $g(p)$ abhängende Schranke S angeben, derart, daß für alle $p > S$ aus $\mathfrak{P}$ die Maximallänge l der in den k Klassen der k-ten Potenzreste und Nichtreste auftretenden Sequenzen

$$l < \sqrt{p} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) h(p)$$

ist; hierbei ist

$$h(p) = \frac{\sqrt{p}}{g(p)} + g(p).$$

Beweis. Aus (23) folgt, da die Zahl 2 ein k-ter Potenzrest ist, analog wie beim Beweise des Satzes 4, daß im Intervall

$$A = \left\{\frac{1}{2}g(p) \dots g(p)\right\}$$

stets mindestens zwei aufeinanderfolgende Zahlen liegen, die zu verschiedenen Klassen gehören. Es seien dies wieder die Zahlen b und $b+1$.

Ferner sei

$$a,\ a+1,\ \ldots,\ a+\lambda-1 \tag{26}$$

eine Sequenz von λ Zahlen einer Klasse, und es sei hierbei

$$1 \leqq a < \sqrt{p}. \tag{27}$$

Die positive ganze Zahl $\varkappa$ sei so bestimmt, daß

$$a = (\varkappa - 1)b + \alpha \tag{28}$$

ist, wo α der Bedingung

$$1 \leqq \alpha \leqq b \tag{29}$$

genügt. Man setze

$$\frac{\sqrt{p}}{g(p)} + g(p) = h(p). \tag{30}$$

Wäre nun

$$\lambda \geqq [h(p)] + 1, \tag{31}$$

so wäre wegen (27), (28) und (29)

$$(\varkappa - 1)b \leqq a - 1 < \sqrt{p} - 1,$$

$$\varkappa < \frac{\sqrt{p}-1}{b} + 1,$$

$$\varkappa + b < \frac{\sqrt{p}-1}{b} + b + 1. \tag{32}$$

Setzt man nun

$$f(b) = \frac{\sqrt{p}-1}{b} + b, \tag{33}$$

so ist $f(b)$ im Intervall A nach unten konvex; an den Endpunkten dieses Intervalls wird wegen (30) und (24)

$$f\left(\frac{1}{2}g(p)\right) = \frac{2(\sqrt{p}-1)}{g(p)} + \frac{1}{2}g(p) < \frac{\sqrt{p}}{g(p)} + g(p) = h(p),$$

$$f(g(p)) = \frac{\sqrt{p}-1}{g(p)} + g(p) < h(p).$$

Daher ist im ganzen Intervall A

$$f(b) < h(p),$$

also wegen (32) und (33)

$$\varkappa + b < h(p) + 1,$$

$$\varkappa \leqq [h(p)] - b + 1,$$

$$\varkappa b + \varkappa \leqq \varkappa b + [h(p)] - b + 1.$$

Wegen (28), (29) und (31) würde daher folgen

$$a \leqq \varkappa b < \varkappa(b+1) \leqq \varkappa b + [h(p)] - b + 1 \leqq a - \alpha + \lambda \leqq a + \lambda - 1.$$

Also wären $\varkappa b$ und $\varkappa(b+1)$ Zahlen der Sequenz (26). Dies ist unmöglich, da $\varkappa b$ und $\varkappa(b+1)$ zu verschiedenen Klassen gehörten. Die Annahme (31) führt also zu einem Widerspruch. Folglich ist

$$\lambda \leqq [h(p)]. \tag{34}$$

Gäbe es nun im ganzen Intervall $\{0 \dots p\}$ eine Sequenz der Länge

$$l \geqq \sqrt{p} + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) h(p), \tag{35}$$

wo ε eine beliebig kleine, feste positive Größe bedeutet, so würden nach Satz 1 die Zahlen

$$\left[\frac{p}{\sqrt{p} + \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)h(p)}\right]+1, \left[\frac{p}{\sqrt{p} + \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)h(p)}\right]+2, \dots, \left[\sqrt{p}+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)h(p)\right] \tag{36}$$

eine Sequenz von k-ten Potenzresten bilden. Nun ist für hinreichend großes p wegen (24) und (25)

$$\left\{\sqrt{p} + \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)h(p)\right\}\left\{\sqrt{p} - \frac{1}{2}h(p)\right\}$$

$$= p + \varepsilon h(p)\sqrt{p} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)h^2(p) > p + \sqrt{p} + \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)h(p),$$

folglich

$$\left[\frac{p}{\sqrt{p} + \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)h(p)}\right]+1 < \frac{p+\sqrt{p}+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)h(p)}{\sqrt{p} + \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)h(p)} < \sqrt{p} - \frac{1}{2}h(p). \tag{37}$$

Bezeichnet nun λ_0 die Anzahl der ganzen Zahlen im Intervall

$$\left\{\left[\frac{p}{\sqrt{p} + \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)h(p)}\right]+1 \dots \left[\sqrt{p}+\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)h(p)\right]\right\},$$

so ist

$$\lambda_0 > \sqrt{p} + \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)h(p) - \sqrt{p} + \frac{1}{2}h(p) = (1+\varepsilon)h(p).$$

Dies steht wegen (26), (27), (36) und (37) im Widerspruch zu (34). Daher ist die Ungleichung (35) unmöglich, und es ist

$$l < \sqrt{p} + \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)h(p).$$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

Für alle hinreichend großen Primzahlen p kann nach dem Satz des Herrn Winogradoff

$$g(p) = p^{\left(2e^{\frac{k-1}{k}}\right)^{-1}}$$

gewählt werden.

(Eingegangen am 25. Juni 1930.)

Über die Bedingung (*N*) von Lusin und das allgemeine Denjoysche Integral.

Von

J. Ridder in Groningen (Niederlande).

Es sei $y = f(x)$ eine im abgeschlossenen Intervall (a, b) stetige Funktion. Sie genügt der Bedingung (N) von Lusin, wenn zu jeder Teilmenge E von (a, b), deren Maß Null ist, die Menge $G(E)$ der zugehörigen y-Werte das gleiche Maß hat.

Jedes unbestimmte spezielle oder allgemeine Denjoysche Integral[1]) genügt dieser Bedingung. Das Umgekehrte gilt jedoch nicht. S. Saks bewies nun das folgende Theorem[2]): *Wenn eine stetige Funktion $f(x)$ der Bedingung (N) genügt und ihre untere Derivierte $\underline{D}\, f(x)$[3]) eine Perronsche Oberfunktion*[4]) *hat, so wird $f(x)$ ein unbestimmtes Integral sein im Denjoy-Perronschen Sinne*[5]).

Das Ziel dieser Arbeit wird es sein, einen analogen Satz für das allgemeine D-Integral abzuleiten (Satz III). Die Sätze I und II sind nicht neu; sie werden, ebenso wie das Lemma des § 2, bei den Beweisen der Sätze III und IV angewandt.

---

[1]) Für die Theorie des allgemeinen D-Integrals siehe Lebesgue, Leçons sur l'int., 2 Éd. (1928), Chap. X, für die Theorie des speziellen D-Integrals Hobson, Theory of functions I, Chapter VIII.

[2]) Siehe Saks, Fund. Math. **13** (1929), S. 218–227.

[3]) D. h. die kleinere der beiden unteren Derivierten von Dini.

[4]) Eine für $a \leqq x \leqq b$ zu $g(x)$ gehörende Perronsche Oberfunktion $\psi(x)$ ist: 1. stetig; 2. gleich Null in a; 3. hat in jedem Punkte x ihre untere Derivierte $\neq -\infty$ und $\geqq g(x)$. Auf übereinstimmende Weise sind die Perronschen Unterfunktionen $\{\varphi(x)\}$ zu definieren. Wenn für jedes x die untere Schranke aller $\psi(x)$-Werte und die obere Schranke aller $\varphi(x)$-Werte zusammenfallen, so definiert ihr gemeinsamer Wert das unbestimmte Perronsche Integral von $g(x)$ in (a, b). Siehe Kamke, Das Lebesguesche Integral, Abschnitt IV.

[5]) Daß die spezielle Denjoysche und die Perronsche Integraldefinition ebenso weittragend sind, bewiesen Looman [siehe Math. Annalen **93** (1924), S. 153–156] und Alexandroff [siehe Math. Zeitschr. **20** (1924), S. 213–222].

§ 1.

Satz I. *Wenn eine für* $a \leqq x \leqq b$ *stetige Funktion* $f(x)$ *der Bedingung* (N) *genügt und fast überall*

$$\underline{D} f(x) \leqq u(x)$$

ist, wobei $u(x)$ *summierbar sein soll, so wird* $f(x)$ *totalstetig, also ein unbestimmtes Lebesguesches Integral sein*[6]).

Definitionen. 1. $g(x)$ sei eine in (a, b) definierte Funktion. Eine für $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion $\psi^*(x)$ wird eine *verallgemeinerte Perronsche Oberfunktion* sein, wenn sie den Bedingungen genügt: a) $\psi^*(a) = 0$; b) es läßt sich (a, b) überdecken von höchstens abzählbar vielen perfekten Mengen (E_j) und einer abzählbaren (eventuell leeren) Menge M, derartig daß auf jedem E_j die „in bezug auf dieses E_j" genommenen unteren Derivierten von $\psi^*(x) \neq -\infty$ und $\geqq g(x)$ sind.

2. Ändert man in 1. $\psi^*(x)$ in $\varphi^*(x)$, unteren in oberen, $-\infty$ in $+\infty$ und $\geqq$ in $\leqq$, so erhält man die Definition einer *verallgemeinerten Perronschen Unterfunktion* $\varphi^*(x)$.

3. $g(x)$ wird über (a, b) integrierbar sein nach der *verallgemeinerten Perronschen Integraldefinition*, wenn die untere Schranke aller $\{\psi^*(b)\}$ und die obere Schranke aller $\{\varphi^*(b)\}$ einander gleich sind; ihr gemeinsamer Wert soll dann das bestimmte Integral von $g(x)$ über (a, b) definieren.

Satz II. *Die allgemeine Denjoysche und die verallgemeinerte Perronsche Integraldefinition sind ebenso weittragend*[7]).

§ 2.

Definition 4. $f(x)$ sei stetig für $a \leqq x \leqq b$; wir nennen eine in (a, b) definierte Funktion $g(x)$ eine *verallgemeinerte obere Derivierte von* $f(x)$, wenn sie fast überall zusammenfällt mit der oberen Derivierten von $f(x)$ in bezug auf eine der perfekten Mengen (H_j), deren Anzahl höchstens abzählbar ist und die (a, b) überdecken, ausgenommen vielleicht in den Punkten einer Nullmenge.

Lemma. *Zu der für* $a \leqq x \leqq b$ *stetigen Funktion* $f(x)$ *gehöre in* (a, b) *die verallgemeinerte obere Derivierte* $g(x)$.

Wenn für eine verallgemeinerte Perronsche Oberfunktion $\psi^*(x)$ *von* $g(x)$ *und eine in* (a, b) *enthaltene perfekte Menge* K *zu jedem Intervall* (α, β), *das keine zu* K *gehörenden inneren Punkte hat,*

$$f(\beta) - f(\alpha) \leqq \psi^*(\beta) - \psi^*(\alpha) \tag{1}$$

[6]) Siehe loc. cit. [2]), S. 220, 221.

[7]) Für den Beweis siehe unsere Arbeit: *Über den Perronschen Integralbegriff und seine Beziehung zu den R-, L- und D-Integralen*. Math. Zeitschr. **34** (1931), S. 234—269.

ist, so wird es ein Stück π_1 von K geben (mit den Endpunkten c_1 und d_1) derartig, daß dieselbe Ungleichung auch gilt zwischen je zwei Punkten des Intervalls (c_1, d_1).

Beweis. Auf einer jeden der in Definition 1 angeführten perfekten Mengen (E_j) wird, nach einem Satze von Denjoy[8]), $\psi^*(x)$ fast überall eine endliche Ableitung haben in bezug auf diese Menge; somit muß $g(x)$ fast überall in (a, b) von $+\infty$ verschieden sein.

Auf der Teilmenge N_j eines H_j (j willkürlich), in deren Punkten $g(x)$ mit der oberen Derivierten von $f(x)$ in bezug auf dieses H_j zusammenfällt (siehe Definition 4), wird nach dem Denjoyschen Satze [8]) fast überall eine in bezug auf H_j endliche Ableitung $= g(x)$ existieren. Da H_j in fast jedem ihrer Punkte die Dichte 1 hat, so ist fast überall auf H_j, also auch fast überall in (a, b) $g(x)$ eine endliche approximative Ableitung[9]) von $f(x)$.

Die perfekte Menge K enthält ein Stück π, das ganz zu einer der Mengen (E_j) gehört[10]); aus der Definition 1 folgt, daß auf π die untere Derivierte von $\psi^*(x)$ in bezug auf π $[D_\pi \psi^*(x)] \neq -\infty$ ist. Es wird somit ein Stück π_1 von π (mit den Endpunkten c_1 und d_1) und eine endliche Zahl A geben derartig, daß zwischen je zwei Punkten α und β von π_1

$$\frac{\psi^*(\beta) - \psi^*(\alpha)}{\beta - \alpha} > A \tag{2}$$

ist[11]).

Weiter ist, nach der Definition von $\psi^*(x)$, fast überall auf π_1

$$\underline{D}_{\pi_1} \psi^*(x) \geqq g(x). \tag{3}$$

Da $g(x)$ fast überall in (a, b) approximative Ableitung von $f(x)$ ist, so wird $g(x)$ in fast jedem Punkte von π_1 mittlere (oder extreme) Derivierte

[8]) Dieser lautet: „Bei einer auf einer Menge E definierten und stetigen Funktion $f(x)$ sind, wenn man von einer Nullmenge absieht, in den verschiedenen Punkten (x) von E nur noch die folgenden vier Fälle möglich: 1. $D^+ = D^- = +\infty$, $D_+ = D_- = -\infty$; 2. $D^+ = D_+ = D^- = D_- =$ endlich; 3. $D^+ = +\infty$, $D_- = -\infty$, $D_+ = D^- =$ endlich; 4. $D^- = +\infty$, $D_+ = -\infty$, $D_- = D^+ =$ endlich." Siehe Denjoy, Journal de math. (7) **1** (1915), S. 105–240, insbesondere S. 174–195.

[9]) Eine Zahl A heißt approximative Ableitung einer Funktion $f(x)$ im Punkte ξ, wenn für die Punkte (x') einer Menge $M(\xi)$, welche in ξ die Dichte 1 hat,

$$\lim_{x' = \xi} \frac{f(x') - f(\xi)}{x' - \xi} = A$$

ist.

[10]) Dies folgt durch Anwendung des Hilfssatzes: „Wenn sich das abgeschlossene Intervall (a, b) zerlegen läßt in endlich oder abzählbar unendlich viele Mengen, so hat jede in (a, b) enthaltene, perfekte Menge ein Stück, auf dem eine jener Mengen überall dicht liegt." Siehe loc. cit. [7]), § 6.

[11]) Siehe Denjoy, loc. cit. [8]), S. 165 oder Lebesgue, loc. cit. [1]), S. 220.

von $f(x)$ sein in bezug auf π_1. Dadurch folgt aus (3), daß fast überall auf π_1

$$\underline{D}_{\pi_1}\psi^*(x) \geqq \underline{D}_{\pi_1} f(x) \tag{4}$$

sein wird.

Die allgemeinen unteren Derivierten der in (c_1, d_1) stetigen Funktionen $\psi_1^*(x)$ und $f_1(x)$, welche auf π_1 mit $\psi^*(x)$ bzw. $f(x)$ zusammenfallen und sich in den zu π_1 komplementären Intervallen linear ändern, genügen zufolge von (1) und (4) in fast jedem Punkte von (c_1, d_1) der Ungleichung

$$\underline{D}\,\psi_1^*(x) \geqq \underline{D}\, f_1(x).$$

Außerdem folgt aus (2), daß $\psi_1^*(x)$ nach unten beschränkte Differenzenquotienten hat, somit eine Funktion von beschränkter Schwankung ist; $\underline{D}\,\psi_1^*(x)$ wird summierbar sein, und man hat für $c_1 \leqq \alpha < \beta \leqq d_1$

$$\int_\alpha^\beta (L)\,\underline{D}\,\psi_1^*(x)\,dx \leqq \psi_1^*(\beta) - \psi_1^*(\alpha).\ ^{12})$$

Da $f_1(x)$ der Bedingung (N) genügt, liefert Anwendung des Satzes I die Totalstetigkeit von $f_1(x)$ in (c_1, d_1); für jedes Paar zu π_1 gehörender Punkte α und β $(\alpha < \beta)$ wird

$$f_1(\beta) - f_1(\alpha) = \int_\alpha^\beta (L)\,\underline{D}\, f_1(x)\,dx \leqq \int_\alpha^\beta (L)\,\underline{D}\,\psi_1^*(x)\,dx \leqq \psi_1^*(\beta) - \psi_1^*(\alpha)$$

sein.

Daraus folgt leicht die Ungleichung (1) zwischen je zwei willkürlichen Punkten α und β von (c_1, d_1).

§ 3.

Satz III. *Zu der für $a \leqq x \leqq b$ stetigen Funktion $f(x)$ gehöre in (a, b) die verallgemeinerte obere Derivierte $g(x)$.*

Wenn $f(x)$ der Bedingung (N) genügt und $g(x)$ eine verallgemeinerte Perronsche Oberfunktion $\psi^*(x)$ hat, so wird $f(x)$ ein unbestimmtes allgemeines Denjoysches Integral sein.

Beweis. Wir behaupten, daß zwischen je zwei Punkten α und β $(\alpha < \beta)$ von (a, b) gilt

$$f(\beta) - f(\alpha) \leqq \psi^*(\beta) - \psi^*(\alpha). \tag{5}$$

Im entgegengesetzten Falle bildeten die Punkte, in deren jede Umgebung Punkte α und β liegen mit

$$f(\beta) - f(\alpha) > \psi^*(\beta) - \psi^*(\alpha),$$

---

[12]) Siehe Lebesgue, loc. cit. [1]), Chap. IX oder Carathéodory, Vorles. über reelle Funktionen, Kap. X.

eine nicht-leere, abgeschlossene Menge K. Da K keinen isolierten Punkt enthalten kann, so ist sie perfekt.

In den zu K komplementären Intervallen würde zwischen den Endpunkten eines jeden Teilintervalls die Ungleichung (5) gelten müssen. Nach dem Lemma existierte somit ein Stück π_1 von K (mit den Endpunkten c_1 und d_1) derartig, daß für jedes Paar von in (c_1, d_1) enthaltenen Punkten α und β $(\alpha < \beta)$ (5) gültig wäre. Wir gelangen also zu einem Widerspruch.

Nach dem Beweisverfahren des Lemmas läßt sich nun zeigen, daß jede perfekte Menge K ein Stück π_1 enthalten muß, so daß die zugehörige Funktion $f_1(x)$ totalstetig ist. Daraus folgt, daß $f(x)$ ein unbestimmtes allgemeines D-Integral ist[13])[14]).

---

[13]) Hier wird der Satz angewandt: „Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine für $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion $f(x)$ in (a, b) ein unbestimmtes allgemeines D-Integral sei, besteht darin, daß jede perfekte Teilmenge E von (a, b) ein Stück π besitzt mit den Endpunkten c und d, so daß die stetige Funktion $f_1(x)$, welche auf π mit $f(x)$ zusammenfällt und sich in den zu π komplementären Intervallen linear ändert, totalstetig ist in (c, d)." Siehe Lebesgue, loc. cit. [1]), S. 232.

[14]) In unserer Arbeit, loc. cit. [7]), haben wir einige Gruppen von Ober- und Unterfunktionen eingeführt, welche dienen zur Charakterisierung der meist bekannten Integraldefinitionen. Ihre Anwendung führt auch zu mehreren Resultaten, welche in gleicher Richtung liegen wie der Satz III (und der in der Einleitung zitierte Saksscheche Satz):

Eine für $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion $f(x)$ genüge der Bedingung (N). Dann läßt sich behaupten: α) *$f(x)$ ist ein unbestimmtes Lebesguesches Integral, wenn $\underline{D} f(x)$* [oder $\overline{D} f(x)$] *eine Oberfunktion hat gemäß loc. cit.* [7]), *Definition* 3; β) *$f(x)$ ist ein unbestimmtes Denjoy-Khintchinesches Integral* (vgl. loc. cit. [7]), Text bei Fußnote [27])), *wenn $\overline{D} f(x)$ in (a, b) eine Oberfunktion hat gemäß loc. cit.* [7]), *Definition* 13; γ) *$f(x)$ ist ein unbestimmtes spezielles Denjoysches Integral* (vgl. loc. cit. [7]), Text bei Fußnote [33])), *wenn $\underline{D} f(x)$* [oder $\overline{D} f(x)$] *in (a, b) eine Oberfunktion hat gemäß loc. cit.* [7]), *Definition* 20; δ) *$f(x)$ ist ein unbestimmtes allgemeines Denjoysches Integral, wenn eine verallgemeinerte obere Derivierte von $f(x)$* [oder ihre fast überall existierend gedachte, approximative Ableitung] *eine Oberfunktion hat gemäß loc. cit.* [7]), *Definition* 23.

α) folgt auf einfache Weise aus dem Satze I von § 1 und diesem Satze: „Eine in einem Intervall $(a \leqq x \leqq b)$ endliche und unterhalb totalstetige Funktion (siehe loc. cit. [7]), Definition 1) ist die Summe einer totalstetigen und einer nicht abnehmenden Funktion; und umgekehrt." [Für den Beweis siehe W. H. Young, Proc. London Math. Soc. (2) 9 (1910), S. 294–297. Wir bemerkten erst späterhin, daß die von uns loc. cit. [7]) eingeführten, unterhalb und oberhalb totalstetigen Funktionen schon von W. H. Young in seiner eben zitierten Arbeit unter den Namen von "upper and lower semi-integrals" angewandt wurden bei Untersuchungen über Summation bei oszillierenden Folgen von Funktionen.] Die Beweise der Behauptungen β), γ) und δ) verlaufen wie der des Satzes III.

§ 4.

Aus einem Satze von Khintchine[15]) geht hervor, daß eine für $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion, welche in (a, b) fast überall eine approximative Ableitung hat, eine verallgemeinerte obere Derivierte besitzt, die fast überall mit der approximativen Ableitung zusammenfällt. Auch läßt sich zeigen (vgl. die erste Hälfte des Beweises in § 2), daß eine für $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion $f(x)$ fast überall eine approximative Ableitung haben wird, zusammenfallend mit einer verallgemeinerten oberen Derivierten $g(x)$ von $f(x)$, wenn man weiß, daß $g(x)$ eine verallgemeinerte Perronsche Oberfunktion hat. Man sieht dadurch leicht, daß mit dem Satze III völlig gleichwertig ist der

Satz IIIbis. *Die für $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion $f(x)$ besitze fast überall eine approximative Ableitung; $h(x)$ sei eine in (a, b) definierte Funktion, welche fast überall mit dieser approximativen Ableitung zusammenfällt.*

Wenn $f(x)$ der Bedingung (N) genügt und $h(x)$ eine verallgemeinerte Perronsche Oberfunktion $\psi^*(x)$ hat, so wird $f(x)$ ein unbestimmtes allgemeines D-Integral sein.

§ 5.

Aus dem Satze IIIbis läßt sich ableiten der

Satz IV. *Die für $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion $f(x)$ habe in fast jedem Punkte eine approximative Ableitung $D_{\text{appr.}} f(x)$, welche der Ungleichung*

$$D_{\text{appr.}} f(x) \leqq u(x) \tag{6}$$

genügt, wobei $u(x)$ eine in (a, b) nach der allgemeinen Denjoyschen Definition integrierbaren Funktion sein soll; weiter genüge $f(x)$ der Bedingung (N).

Dann wird $f(x)$ ein unbestimmtes allgemeines D-Integral sein[16]).

Beweis. In denjenigen Punkten, wo die approximative Ableitung existiert und (6) gilt, nehmen wir die Funktion $h(x) = D_{\text{appr.}} f(x)$ und

[15]) Dieser lautet: „$f(x)$ sei meßbar in (a, b). Damit sie eine approximative Ableitung fast überall in (a, b) besitze, ist notwendig und hinreichend, daß man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine perfekte Teilmenge P angeben kann, deren Maß um weniger als ε von $b - a$ abweicht und derartig, daß die Funktion $f_1(x)$, welche auf P mit $f(x)$ zusammenfällt und sich linear ändert in den zu P komplementären Intervallen (u_n) oder $(a_n \leqq x \leqq b_n)$, totalstetig ist." Siehe Khintchine, Comptes Rendus **164** (1917), S. 142–144; oder Fund. Math. **9** (1927), S. 255.

[16]) In etwas abweichender Formulierung findet man dasselbe Resultat (ohne Beweis) bei S. Saks, Atti Congresso Matematici Bologna (1928), S. 254.

in den übrigen Punkten von (a, b) z. B. $= 0$. Durch Abänderung der Werte von $u(x)$ auf einer (eventuell leeren) Nullmenge wird die Ungleichung

$$h(x) \leqq u(x) \tag{7}$$

für jedes x erfüllt. Nach Satz II besitzt $u(x)$ verallgemeinerte Perronsche Oberfunktionen. Aus (7) und der Definition 1 geht hervor, daß diese Funktionen zugleich verallgemeinerte Perronsche Oberfunktionen von $h(x)$ sind. Damit folgt Satz IV unmittelbar aus dem Satze III bis.[17])

[17]) Auf übereinstimmende Weise läßt sich aus Fußnote [14]), β) ableiten der Satz: *Wenn eine für $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion $f(x)$ der Bedingung (N) genügt und fast überall*

$$\bar{D} f(x) \leqq u(x)$$

ist, wobei $u(x)$ eine nach Denjoy-Khintchine integrierbare Funktion (vgl. loc. cit. [7]), Text bei Fußnote [27])) *sein soll, so wird $f(x)$ ein unbestimmtes Integral nach Denjoy-Khintchine sein.*

(Eingegangen am 22. Januar 1931.)

Zur Deutung der intuitionistischen Logik.

Von

A. Kolmogoroff in Moskau.

Die vorliegende Abhandlung kann von zwei ganz verschiedenen Standpunkten aus betrachtet werden.

1. Wenn man die intuitionistischen erkenntnistheoretischen Voraussetzungen nicht anerkennt, so kommt nur der erste Paragraph in Betracht. Die Resultate dieses Paragraphen können etwa wie folgt zusammengefaßt werden:

Neben der theoretischen Logik, welche die Beweisschemata der theoretischen Wahrheiten systematisiert, kann man die Schemata der Lösungen von Aufgaben, z. B. von geometrischen Konstruktionsaufgaben, systematisieren. Dem Prinzip des Syllogismus entsprechend tritt hier z. B. das folgende Prinzip auf: *Wenn wir die Lösung von b auf die Lösung von a und die Lösung von c auf die Lösung von b zurückführen können, so können wir auch die Lösung von c auf die Lösung von a zurückführen.*

Man kann eine entsprechende Symbolik einführen und die formalen Rechenregeln für den symbolischen Aufbau des Systems von solchen Aufgabenlösungsschemata geben. So erhält man neben der theoretischen Logik eine neue *Aufgabenrechnung.* Dabei braucht man keine speziellen erkenntnistheoretischen, z. B. intuitionistischen Voraussetzungen.

Es gilt dann die folgende merkwürdige Tatsache: *Nach der Form fällt die Aufgabenrechnung mit der Brouwerschen, von Herrn Heyting neuerdings formalisierten*[1]*), intuitionistischen Logik zusammen.*

2. Im zweiten Paragraphen wird, unter Anerkennung der allgemeinen intuitionistischen Voraussetzungen, die intuitionistische Logik kritisch untersucht; es wird dabei gezeigt, daß sie durch die Aufgabenrechnung ersetzt werden sollte, denn ihre Objekte sind in Wirklichkeit keine theoretischen Aussagen, sondern vielmehr Aufgaben.

[1]) Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitz. d. Pens. Akad. (1930), I, S. 42; II, S. 57; III, S. 158.

§ 1.

Wir definieren nicht, was eine *Aufgabe* ist, sondern erklären dies durch einige Beispiele. Aufgaben sind:

1. Vier solche ganze Zahlen x, y, z, n finden, für welche die Relationen

$$x^n + y^n = z^n, \qquad n > 2, \tag{1}$$

gelten.

2. Die Falschheit des Fermatschen Satzes beweisen.

3. Durch drei gegebene Punkte (x, y, z) einen Kreis ziehen[2]).

4. Vorausgesetzt, daß eine Wurzel der Gleichung $a x^2 + b x + c = 0$ gegeben ist, die andere zu finden.

5. Vorausgesetzt, daß die Zahl π rational ausgedrückt ist:

$$\pi = \frac{n}{m},$$

einen analogen Ausdruck für die Zahl e finden.

Daß die zweite Aufgabe von der ersten verschieden ist, ist klar und bildet noch keine speziell intuitionistische Behauptung[3]). Die vierte und fünfte Aufgabe sind Beispiele von *konventionellen* Aufgaben; dabei ist die Voraussetzung in der fünften Aufgabe unmöglich, und folglich ist die Aufgabe selbst *inhaltslos*. Der Beweis, daß eine Aufgabe inhaltslos ist, wird weiter immer als ihre Lösung betrachtet werden.

Wir glauben, daß nach diesen Beispielen und Erklärungen die Begriffe „Aufgabe" und „Lösung der Aufgabe" in allen Fällen, welche in den konkreten Gebieten der Mathematik vorkommen, ohne Mißverständnis gebraucht werden können[4]). Aufgaben werden weiterhin mit kleinen lateinischen Buchstaben $a, b, c, \ldots$ bezeichnet.

Wenn a und b zwei Aufgaben sind, bezeichnet $a \wedge b$ die Aufgabe „beide Aufgaben a und b lösen", während $a \vee b$ die Aufgabe bezeichnet „mindestens eine der Aufgaben a und b lösen". Weiter ist $a \supset b$ die Aufgabe „vorausgesetzt, daß die Lösung von a gegeben ist, b lösen", oder, was dasselbe bedeutet, „die Lösung von b auf die Lösung von a zurückzuführen".

Wir haben früher nicht vorausgesetzt, daß jede Aufgabe lösbar ist. Wenn z. B. der Fermatsche Satz richtig ist, so wäre die Lösung der ersten

---

[2]) Um ganz präzis zu sein, sollte man natürlich bei der Formulierung dieser Aufgabe die erlaubten Konstruktionsmittel angeben.

[3]) Die *Aussagen* „der Fermatsche Satz ist falsch" und „vier (1) genügende Zahlen existieren" sind dagegen vom Standpunkt der klassischen Logik aus äquivalent.

[4]) Die Hauptbegriffe der Aussagenlogik „Aussage" und „Beweis der Aussage" befinden sich nicht in besserer Lage.

Aufgabe kontradiktorisch. Dementsprechend bezeichnet $\neg a$ die Aufgabe „vorausgesetzt, daß die Lösung von a gegeben ist, einen Widerspruch erhalten“ [5]).

Nach diesen Definitionen bezeichnet, wenn $a, b, c, d, \ldots$ die Aufgaben sind, jede mit der Hilfe von den Zeichen $\wedge$, $\vee$, $\supset$ und $\neg$ zusammengesetzte Formel $p(a, b, c, \ldots)$ auch eine Aufgabe. Wenn aber $a, b, c, \ldots$ nur Symbole der unbestimmten Aufgaben sind, sagt man, daß $p(a, b, c, \ldots)$ eine Funktion der Aufgabenvariablen $a, b, c, \ldots$ ist. Im allgemeinen bedeutet, wenn x eine Variable (von beliebiger Art) ist und $a(x)$ eine Aufgabe bezeichnet, deren Sinn von dem Werte von x abhängt, $(x)a(x)$ die Aufgabe „eine allgemeine Methode für die Lösung von $a(x)$ bei jedem einzelnen Wert von x anzugeben“. Man soll dies so verstehen: Die Aufgabe $(x)a(x)$ zu lösen, bedeutet, imstande sein, für jeden gegebenen Einzelwert x_0 von x die Aufgabe $a(x_0)$ nach einer endlichen Reihe von im voraus (schon vor der Wahl von x_0) bekannten Schritten zu lösen [6]).

Für die Funktionen $p(a, b, c, \ldots)$ von unbestimmten Aufgaben $a, b, c, \ldots$ schreibt man weiter statt

$$(a)(b)(c)\ldots p(a, b, c, \ldots)$$

einfach

$$\vdash p(a, b, c, \ldots). \text{ [6a]})$$

$\vdash p(a, b, c, \ldots)$ bezeichnet also die Aufgabe „eine allgemeine Methode anzugeben für die Lösung von $p(a, b, c, \ldots)$ bei jeder einzelnen Auswahl der Aufgaben $a, b, c, \ldots$“.

Die Aufgaben von der Form $\vdash p(a, b, c, \ldots)$, wo p durch die Zeichen $\vee$, $\wedge$, $\supset$ und $\neg$ ausgedrückt ist, bilden den Gegenstand der *elementaren Aufgabenrechnung* [7]).

Die entsprechenden Funktionen $p(a, b, c, \ldots)$ sind *die elementaren Aufgabenfunktionen.*

---

[5]) Es sei bemerkt, daß man $\neg a$ nicht als die Aufgabe „die Unlösbarkeit von a beweisen“ zu verstehen hat. Wenn man im allgemeinen „die Unlösbarkeit von a“ als einen wohldefinierten Begriff betrachtet, erhält man nur den Satz, daß aus $\neg a$ die Unlösbarkeit von a folgt, jedoch nicht die Umkehrung davon. Wenn es z. B. bewiesen wäre, daß die Durchführung einer Wohlordnung des Kontinuums unsere Fähigkeiten übersteigt, könnte man noch nicht behaupten, daß aus der Gegebenheit einer solchen Wohlordnung ein Widerspruch folgt.

[6]) Auch hier, wie früher, hoffen wir, daß diese Definition zu keinen Mißverständnissen in den konkreten mathematischen Gebieten führen können.

[6a]) Diese Erklärung der Bedeutung des Zeichens $\vdash$ ist vom Heytingschen ganz verschieden, obwohl sie zu denselben Rechenregeln führt.

[7]) Diese Definition ist der Definition der elementaren Aussagenrechnung analog. In der Aussagenrechnung lassen sich aber die zu $\wedge$, $\vee$, $\supset$ und $\neg$ analogen logischen Funktionen durch zwei unter ihnen ausdrücken. In der Aufgabenrechnung sind alle vier Funktionen unabhängig.

Daß *ich* eine Aufgabe gelöst habe, ist eine rein subjektive Tatsache, welche an sich noch kein allgemeines Interesse hat. Die logischen und mathematischen Aufgaben besitzen aber die spezielle Eigenschaft *der Allgemeingültigkeit ihrer Lösungen*: Wenn ich eine logische oder mathematische Aufgabe gelöst habe, so kann ich diese Lösung allgemeinverständlich darstellen, und es ist *notwendig*, daß sie als richtige Lösung anerkannt wird, obwohl diese Notwendigkeit einen einigermaßen idealen Charakter hat, denn sie setzt eine genügende Intelligenz der Zuhörer voraus[8]).

Der eigentliche Zweck der Aufgabenrechnung besteht darin, eine Methode für die Lösung von Aufgaben der Form $\vdash p(a, b, c, \ldots)$, wo $p(a, b, c, \ldots)$ eine elementare Aufgabenfunktion ist, durch die mechanische Anwendung einiger einfacher Rechenregeln anzugeben. Wir müssen aber, um alles auf diese Rechenregeln zurückzuführen, voraussetzen, daß die Lösungen von einigen elementaren Aufgaben schon bekannt sind. Wir nehmen als *Postulate* an, daß wir die zwei folgenden Aufgabengruppen A und B schon gelöst haben. Die weitere Darstellung wendet sich nur an einen solchen Leser, welcher alle diese Aufgaben gelöst hat[9]).

A.
$$\left\{\begin{array}{ll}
2.1. & \vdash .a \supset a \wedge a .\ ^{10}) \\
2.11. & \vdash .a \wedge b \supset b \wedge a . \\
2.12. & \vdash .a \supset b . \supset . a \wedge c \supset b \wedge c . \\
2.13. & \vdash .a \supset b . \wedge . b \supset c . \supset . a \supset c , \\
2.14. & \vdash .b \supset . a \supset b . \\
2.15. & \vdash .a \wedge . a \supset b . \supset b . \\
3.1. & \quad .a \supset a \vee b . \\
3.11. & \vdash .a \vee b \supset b \vee a . \\
3.12. & \vdash .a \supset c . \wedge . b \supset c . \supset . a \vee b \supset c . \\
4.1. & \vdash . \neg a \supset . a \supset b . \\
4.11. & \vdash .a \supset b . \wedge . \supset \neg b . a \supset \neg a .
\end{array}\right.$$

Wir setzen also voraus, daß der Leser bei jeder Wahl der Aufgaben a, b, c alle hier nach dem Zeichen $\vdash$ stehenden Aufgaben lösen kann. Das bietet auch keinerlei Schwierigkeiten dar. In der Aufgabe (2.12) soll man z. B. in der Annahme, daß die Lösung von a auf die Lösung von b schon

---

[8]) All dies gilt wörtlich auch für die Beweise von theoretischen Aussagen. Es ist jedoch wesentlich, daß jede bewiesene Aussage *richtig* ist; für die Aufgaben hat man keinen dieser Richtigkeit entsprechenden Begriff.

[9]) Im Falle der Aussagenrechnung soll man sich zuerst von der Richtigkeit der Axiome überzeugen, wenn man die Richtigkeit der Folgerungen feststellen will.

[10]) Über die Numerierung der Formeln und den Gebrauch von Trennungszeichen (Punkten) vgl. Heyting I.

zurückgeführt ist, die Lösung von $b \wedge c$ auf die Lösung von $a \wedge c$ zurückführen. Es sei die Lösung von $a \wedge c$ gegeben; das bedeutet, daß sowohl die Lösung von a als auch die Lösung von c gegeben sind; aus der Lösung von a können wir nach Voraussetzung die Lösung von b ableiten; da die Lösung von c schon gegeben ist, erhalten wir die Lösung der beiden Aufgaben b und c, also die Lösung von $b \wedge c$. In dieser Überlegung ist eine allgemeine Methode zur Lösung der Aufgabe

$$a \supset b . \supset . a \wedge c \supset b \wedge c$$

enthalten, welche bei beliebigen a, b, c gültig ist. Wir haben also das Recht, die Aufgabe

$$2.13. \quad \vdash . a \supset b . \supset . a \wedge c \supset b \wedge c .$$

(mit dem Allgemeinheitszeichen –) als gelöst zu betrachten.

Was insbesondere die Aufgabe 4.1. betrifft, so ist, sobald $\neg a$ gelöst ist, die Lösung von a unmöglich und die Aufgabe $a \supset b$ inhaltslos.

Die zweite *Aufgabengruppe B*, für die wir die Gegebenheit der Lösungen postulieren, enthält nur drei Aufgaben[11]). Wir setzen nämlich voraus, daß wir immer imstande sind (eine allgemeine Methode besitzen), für beliebige elementare Aufgabenfunktionen $p, q, r, s, \ldots$ die folgenden Aufgaben zu lösen:

I. Wenn $\vdash . p \wedge q .$ gelöst ist, $\vdash p$ zu lösen.

II. Wenn $\vdash p$ und $\vdash . p \supset q .$ gelöst sind, $\vdash q$ zu lösen.

III. Wenn $\vdash p(a, b, c, \ldots)$ gelöst ist, $\vdash p(q, r, s, \ldots)$ zu lösen.

Jetzt können wir *die Regeln* unserer Aufgabenrechnung angeben:

1. Wir bringen zuerst auf die Liste der gelösten Aufgaben die Aufgaben der Gruppe A.

2. Wenn auf unserer Liste $- . p \wedge q .$ schon steht, ist es gestattet, auch $\vdash p$ dorthin zu setzen.

3. Wenn die beiden Formeln $- p$ und $- . p \supset q .$ dort stehen, dürfen wir auch $\vdash q$ setzen.

4. Wenn $\vdash p(a, b, c, \ldots)$ schon in der Liste steht und $q, r, s, \ldots$ beliebige elementare Aufgabenfunktionen sind, ist es gestattet, auch $p(q, r, s, \ldots)$ dorthin zu setzen.

Man überzeugt sich leicht auf Grund der vorher angenommenen Postulate, daß diese formalen Rechnungen wirklich die Lösungen der entsprechenden Aufgaben sicherstellen.

[11]) Sie lassen sich aber nicht in den Zeichen der elementaren Aufgabenrechnung symbolisch ausdrücken.

Wir verzichten hier auf die weitere Ausführung dieser Rechnungen, denn alle obigen formalen Rechnungsregeln und a priori geschriebenen Formeln fallen mit den Rechnungsregeln und Axiomen der ersten Heytingschen Abhandlung[12]) zusammen; folglich können wir alle Formeln dieser Abhandlung als Aufgaben deuten und alle diese Aufgaben für gelöst halten.

Wir merken uns hier nur einige besonders interessante unter diesen Aufgaben (sie sind also als schon gelöst zu betrachten):

$$4.3. \qquad -.a \supset \neg\neg a.$$

$$4.2. \qquad \vdash .a \supset b. \supset .\neg b \supset \neg a.$$

$$4.32. \qquad \vdash .\neg\neg\neg a \supset a.$$

Die Lösung von 4.3. und 4.2. ist auch ohne Rechnung klar. Die Lösung von 4.32. erhält man aus 4.3. und 4.2., wenn man in 4.2. die Aufgabe b durch $\neg\neg a$ ersetzt.

Wenn man zu den a priori angenommenen Formeln B noch die Formel

$$(1) \qquad \vdash .a \vee \neg a.$$

(in der Aussagenlogik das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten) hinzufügt, erhält man ein vollständiges Axiomensystem der klassischen Aussagenlogik. In unserer Aufgabendeutung lautet die Formel (1) folgendermaßen: Eine allgemeine Methode anzugeben, um für jede Aufgabe a entweder eine Lösung zu finden, oder aus der Gegebenheit von dieser Lösung einen Widerspruch zu folgern! Im einzelnen, wenn die Aufgabe a im Beweis einer Aussage besteht, soll man eine allgemeine Methode besitzen, um jede Aussage entweder zu beweisen oder zum Widerspruch zu führen. Wenn unser Leser sich nicht für allwissend hält, wird er wohl bestimmen, daß die Formel (1) sich nicht auf der Liste der von ihm gelösten Aufgaben befinden kann.

Es ist aber merkwürdig, daß man die Aufgabe

$$4.8. \qquad \vdash .\neg\neg .a \vee \neg a.$$ [13])

lösen kann, wie die Heytingschen Rechnungen zeigen.

Die Formel

$$(2) \qquad \vdash .\neg\neg a \supset a.$$

(in der Aussagenlogik das Prinzip von der zweifachen Negation) kann in unserer Aufgabenrechnung ebenfalls nicht erscheinen, da aus ihr mit Hilfe von 4.8. die Formel (1) folgt.

---

[12]) Heyting I.

[13]) In der Aussagenlogik stellt (4.8) den Brouwerschen Satz über die Widerspruchslosigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten dar.

Wir sehen also, daß, im Gegensatz zu den Heytingschen Formeln der intuitionistischen Logik, schon sehr einfache Formeln der klassischen Aussagenlogik in unserer Aufgabenrechnung nicht erscheinen können.

Es sei noch bemerkt, daß, wenn eine Formel $\vdash p$ in der klassischen Aussagenlogik falsch ist, die entsprechende Aufgabe $\vdash p$ nicht gelöst werden kann. Man kann, in der Tat, aus einer solchen Formel $\vdash p$ mit Hilfe von früher angenommenen Formeln und Rechnungsregeln der Aufgabenrechnung die offensichtlich kontradiktorische Formel $-.\neg a.$ ableiten[14]).

§ 2.

Das Grundprinzip der intuitionistischen Kritik der logischen und mathematischen Theorien ist das folgende: *Jede nicht inhaltslose Aussage soll auf eine oder mehrere ganz bestimmte, für unsere Erfahrung zugängliche Sachverhalte hinweisen*[15]).

Wenn a eine allgemeine Aussage von der Form „jedes Element der Menge K besitzt die Eigenschaft A“ ist, und wenn überdies die Menge K unendlich ist, so genügt die Negation von a, „a ist falsch“, dem obigen Prinzip nicht. Um diesen Umstand zu vermeiden, gibt Brouwer eine neue Definition der Negation: „a ist falsch“ soll bedeuten „a führt zu einem Widerspruch“. So verwandelt sich die Negation von a in eine *Existenzaussage*: „Es existiert eine Kette von logischen Schlüssen, welche in der Annahme der Richtigkeit von a zu einem Widerspruch führt.“ Die Existenzaussagen wurden aber von Brouwer auch einer tiefen Kritik unterworfen.

Es hat nämlich vom intuitionistischen Standpunkt gar keinen Sinn, einfach zu sagen: „Es gibt unter den Elementen einer unendlichen Menge K mindestens ein Element mit der Eigenschaft A“, ohne dieses Element zu zeigen.

Brouwer will aber nicht die Existenzaussagen ganz aus der Mathematik hinauswerfen. Er erklärt nur, daß man eine Existenzaussage nicht aussprechen soll, ohne eine entsprechende Konstruktion anzugeben. Anderseits ist eine Existenzaussage nach Brouwer kein bloßes Konstatieren, daß wir ein entsprechendes Element in K schon gefunden haben; im letzteren Falle wäre die Existenzaussage *vor* der Erfindung der Konstruktion falsch und nur *nachher* richtig. So entsteht diese ganz besondere Art von Aussagen, welche zwar einen mit der Zeit nicht veränderlichen Inhalt haben sollen und doch nur unter speziellen Bedingungen ausgesprochen werden können.

---

[14]) Vgl. V. Glivenko, Acad. r. de Belgique, 5e série, **15** (1929), S. 183.

[15]) Vgl. H. Weyl, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 39. Die ganze weitere Untersuchung der negativen und der Existenzaussagen schließt wesentlich an diese Weylsche Arbeit an.

Man kann natürlich fragen, ob vielleicht diese spezielle Art von Aussagen nur eine Fiktion ist. Es liegt in der Tat eine *Aufgabe* vor, „in der Menge K ein Element mit der Eigenschaft A zu finden"; diese Aufgabe hat wirklich einen bestimmten, von dem Zustand unserer Kenntnisse unabhängigen Sinn; wenn man diese Aufgabe *gelöst* hat, d. h. wenn man ein entsprechendes Element x gefunden hat, erhält man eine empirische Aussage: „Jetzt ist unsere Aufgabe gelöst." Also ist das, was Brouwer unter einer Existenzaussage versteht, vollständig in zwei Elemente zerlegt: das objektive Element (die Aufgabe) und das subjektive (ihre Lösung). Somit findet man keinen Gegenstand übrig, den man als Existenzaussage im eigentlichen Sinne zu bezeichnen hätte.

Daher soll das Hauptresultat der intuitionistischen Kritik der negativen Aussagen einfach so formuliert werden: *Für eine allgemeine Aussage ist es im allgemeinen sinnlos, ihre Negation als bestimmte Aussage zu betrachten.* Dabei verschwindet aber das Objekt der intuitionistischen Logik, da jetzt das Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten für alle Aussagen gilt, für welche die Negation im allgemeinen einen Sinn hat[16]).

Für die Mathematik folgt daraus, daß man die Lösung von Aufgaben als ihren selbständigen Zweck (neben dem Beweis von theoretischen Aussagen) betrachten soll. Wie im ersten Paragraph gezeigt wurde, erhalten im Bereich von Aufgaben und Lösungen auch die Formeln der intuitionistischen Logik einen neuen Sinn[17]).

Göttingen, 15. Januar 1931.

---

[16]) Es entsteht aber eine neue Frage: Welche logischen Gesetze gelten für Aussagen, deren Negation keinen Sinn hat?

[17]) Bemerkung bei der Korrektur. Diese Interpretation der intuitionistischen Logik hängt eng zusammen mit den Ideen, welche Herr Heyting im letzten Bande der „Erkenntnis" (2 (1931), S. 106) entwickelt hat; bei Heyting fehlt allerdings eine klare Unterscheidung zwischen Aussagen und Aufgaben.

(Eingegangen am 6. Februar 1931.)

Affine Differentialgeometrie der parabolischen Strahlensysteme.

Spezielle Flächen.

Von

Wolfgang Haack in Danzig-Langfuhr.

Unter dem gleichen Obertitel veröffentlichte ich im Band 33 dieser Zeitschrift die Grundformeln und die geometrische Interpretation der Invarianten der Differentialgeometrie. Jeder Formelapparat ist aber erst dann wertvoll, wenn er sich zur Untersuchung geometrischer Probleme eignet. Es sollen hier einige Anwendungen durchgeführt werden derart, daß wir ausgehend von den Affininvarianten $\mathfrak{B}$, Q, $\bar{Q}$ einer Fläche (bzw. eines parabolischen Strahlensystems) eine Anzahl geometrischer Eigenschaften herleiten, die einen Überblick über die Fläche im großen geben.

Zunächst werden die Flächen bestimmt, deren Invarianten $\mathfrak{B}$, Q, $\bar{Q}$ konstant sind. Hier gibt es zwei Flächenklassen, von denen die eine schon seit längerer Zeit bekannt ist (vgl. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. II; im folgenden kurz als Blaschke II zitiert), die andere dagegen wohl neu sein dürfte. Sie enthält affine W-Flächen gegenüber allgemeinen (nicht raumtreuen) affinen Transformationen im Gegensatz zu den Flächen der ersten Klasse, die W-Flächen raumtreuer Affinitäten sind. Hier zeigt sich eine wesentliche Erweiterung der affinen Flächentheorie durch Verwendung von homogenen Linienkoordinaten: Der Formelapparat gestattet sämtliche und nicht nur die raumtreuen Transformationen.

Ferner wird die Untersuchung der Flächen durchgeführt, deren Affin-Invarianten der Relation genügen

$$Q = -\bar{Q} = \frac{1}{2}\mathfrak{B}(u, v),$$

wo $\mathfrak{B}(u, v)$ eine willkürliche, hinreichend oft differenzierbare Funktion der Parameter u, v ist. *Diese Flächenklasse enthält und kennzeichnet alle*

diejenigen Schiebflächen, deren eine Schar von Erzeugenden die reellen Darboux-Kurven der Fläche sind. Und zwar ergeben sich die Schiebkurven, die zugleich Darboux-Kurven sind, als *kubische Parabeln*, während die zweite dazu konjugierte Schar von Schiebkurven aus *Gewindekurven* besteht, die zu den kubischen Parabeln in bestimmter Lage sind.

Die vorliegende Note bildet eine unmittelbare Fortsetzung jener Arbeit über parabolische Strahlensysteme, auf die im folgenden stets verwiesen wird (Parabol. Strahlensyst.). Jedoch soll als Einleitung ein kurzer Überblick vorausgeschickt werden:

Die Fläche wird aufgespannt durch ihre beiden Haupttangentensysteme. Diese sind durch die homogenen Plückerschen Linienkoordinaten zweier Sechservektoren $\mathfrak{p}(u, v)$ und $\mathfrak{q}(u, v)$ als Funktionen zweier Parameter u, v gegeben. Die beiden Scharen von Asymptotenlinien werden durch zwei Linearformen bestimmt $d\Psi$ und $d\bar{\Psi}$, auf welche ein invarianter Formelapparat aufgebaut ist. Die Normierung der homogenen Linienkoordinaten konnte so gewählt werden, daß die Schar der Darboux-Kurven, die auf hyperbolischen Flächen reell ist, als Diagonalkurven der beiden Scharen von Asymptotenlinien erscheint. Die lineare Differentialform dieser Schar von Darboux-Kurven wurde mit $d\vartheta$ bezeichnet; die zu diesen konjugierte Kurvenschar wird durch die Linearform $d\bar{\vartheta}$ gegeben.

Wählt man als Kanten eines begleitenden Koordinatentetraeders die Geraden $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, die Haupttangenten des betrachteten Flächenpunktes $\mathfrak{x}$, die Affinnormale $\mathfrak{y}$ und die uneigentlichen Geraden $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, die die uneigentlichen Punkte $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{y}$ von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{y}$ miteinander verbinden, so lassen sich die invarianten Ableitungen[1]) der Grundvektoren bezüglich der Linearformen $d\Psi$ und $d\bar{\Psi}$ als Linearkombinationen der Grundvektoren folgendermaßen ausdrücken:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}_1 &= -\bar{Q}\,\mathfrak{p} - \mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}; & \mathfrak{u}_1 &= -\bar{Q}\,\mathfrak{u} - L\,\mathfrak{w},\\
\mathfrak{p}_2 &= +Q\,\mathfrak{p} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{q}; & \mathfrak{u}_2 &= +Q\,\mathfrak{u} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{v} - \bar{L}\,\mathfrak{w},\\
\mathfrak{q}_1 &= -\mathfrak{B}\,\mathfrak{p} + \bar{Q}\,\mathfrak{q}; & \mathfrak{v}_1 &= +\mathfrak{B}\,\mathfrak{u} + \bar{Q}\,\mathfrak{v} - N\,\mathfrak{w},\\
\mathfrak{q}_2 &= -Q\,\mathfrak{q} + \mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}; & \mathfrak{v}_2 &= -Q\,\mathfrak{v} - \bar{N}\,\mathfrak{w},\\
\mathfrak{y}_1 &= N\,\mathfrak{p} + L\,\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{v}; & \mathfrak{w}_1 &= \mathfrak{v},\\
\mathfrak{y}_2 &= \bar{N}\,\mathfrak{p} + \bar{L}\,\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{u}; & \mathfrak{w}_2 &= -\mathfrak{u}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

[1]) Anmerkung: Die invarianten Ableitungen nach den Linearformen $d\Psi$ und $d\bar{\Psi}$ werden durch kleine Zahlen 1, 2 bezeichnet, diejenigen nach den Darboux-Kurven $d\vartheta = 0$ und den konjugierten $d\bar{\vartheta} = 0$ durch Anhängen des Index ϑ bzw. $\bar{\vartheta}$.

Ebenso können die invarianten Ableitungen der Vierervektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$, die die Eckpunkte des Tetraeders darstellen, aus diesen linear kombiniert werden, so daß man erhält:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{p}_1 = -\bar{Q}\,\boldsymbol{p} - \boldsymbol{y}; && \boldsymbol{q}_1 = \mathfrak{B}\,\boldsymbol{p} + \bar{Q}\,\boldsymbol{q},\\
&\boldsymbol{p}_2 = -Q\,\boldsymbol{p} - \mathfrak{B}\,\boldsymbol{q}; && \boldsymbol{q}_1 = -Q\,\boldsymbol{q} - \boldsymbol{y},\\
&\boldsymbol{x}_1 = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{q}; && \boldsymbol{y}_1 = N\boldsymbol{p} - L\,\boldsymbol{q},\\
&\boldsymbol{x}_2 = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{p}; && \boldsymbol{y}_2 = \bar{N}\,\boldsymbol{p} - \bar{L}\,\boldsymbol{q}.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Durch die Integrabilitätsbedingungen:

$$
\begin{aligned}
-\bar{N} = +L &= Q_1 + \bar{Q}_2 - \mathfrak{B}^2 + 2\,Q\,\bar{Q},\\
-N &= \mathfrak{B}_2 + 3\,\mathfrak{B}\,Q,\\
-L &= \mathfrak{B}_1 + 3\,\mathfrak{B}\,\bar{Q},\\
N_2 - \bar{N}_1 &+ \bar{L}\,\mathfrak{B} + 2\,Q\,N = 0,\\
\bar{L}_1 - L_2 &- N\mathfrak{B} + 2\,\bar{L}\,\bar{Q} = 0
\end{aligned}
\tag{3}
$$

wird der formale Apparat vervollständigt. Man erkennt, daß die Größen $\mathfrak{B}, Q, \bar{Q}$ nebst ihren invarianten Ableitungen ein vollständiges System von affinen Invarianten der Fläche bzw. der parabolischen Strahlensysteme ausmachen. Noch einige Formeln seien hier angegeben: Die Differentialgleichung der Affinkrümmungslinien ist

$$N\,d\Psi^2 + \bar{L}\,d\bar{\Psi}^2 = 0. \tag{4}$$

Auf den Affinsphären werden die Krümmungslinien unbestimmt. Daher ist

$$N = \bar{L} = 0 \tag{5}$$

die Differentialgleichung der Affinsphären.

Für die auf einer hyperbolisch gekrümmten Fläche reellen Darboux-Kurven erhält man die Gleichung

$$d\vartheta = d\Psi - d\bar{\Psi} = 0. \tag{6}$$

Die Darboux-Tangente, das ist die Tangente an die durch $\boldsymbol{x}$ gehende reelle Darboux-Kurve, wird gegeben durch den Vektor

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{p} - \mathfrak{q} \tag{7}$$

und ihr uneigentlicher Punkt durch

$$\boldsymbol{x}_\vartheta = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}) \simeq \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}. \tag{8}$$

Zur Berechnung dieser Formeln vergleiche man Parabol. Strahlensyst., §§ 6, 7 und 9.

§ 1.

Ein System von drei Konstanten $\mathfrak{B}, Q, \bar{Q}$ kann nur dann das System der drei Affininvarianten einer Fläche darstellen, wenn es die Integrabilitätsbedingungen erfüllt. Diese nehmen hier die Gestalt an:

$$\begin{aligned} -N = +L = -\mathfrak{B}^2 - 2Q\bar{Q}, \\ +N = -3\mathfrak{B}Q, \\ +\bar{L} = -3\mathfrak{B}\bar{Q}, \\ \mathfrak{B}Q - 2Q^2 = 0, \\ \mathfrak{B}\bar{Q} - 2\bar{Q}^2 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Zwischen den drei Konstanten bestehen daher zwei Gleichungen, die zwei Systeme reeller Lösungen besitzen. Wählt man $\mathfrak{B}$ willkürlich, so werden Q und $\bar{Q}$ aus den beiden letzten Gleichungen bestimmt:

I. Fall: $\mathfrak{B} = \text{konst.}; \quad Q = \bar{Q} = 0.$

II. Fall: $\mathfrak{B} = \text{konst.}; \quad Q = -\bar{Q} = \frac{1}{2}\mathfrak{B}.$

Es gibt also zwei verschiedene Flächenklassen. Der Fall $\mathfrak{B} = 0$ wird auch hier ausgeschlossen. D. h. wir beschränken uns auf nicht-geradlinige Flächen (Parabol. Strahlensyst. § 5).

Bevor wir an die systematische Untersuchung der Flächen gehen, beweisen wir einen Satz, der die Flächen mit $Q + \bar{Q} = 0$ kennzeichnet und daher für die im folgenden betrachteten Flächen gültig ist.

1. *Ist auf einer Fläche $Q + \bar{Q} = 0$, so umhüllen die längs einer Kurve $d\vartheta = 0$ genommenen Tangentenebenen der Fläche einen Zylinder, dessen Erzeugende Darboux-Tangenten sind.*

Der uneigentliche Punkt einer Darboux-Tangente muß also fest bleiben, wenn man auf der Fläche längs einer Kurve $d\bar{\vartheta} = 0$ fortschreitet. Der uneigentliche Punkt der durch x gehenden Darboux-Tangente ist

$$W\mathfrak{d} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}.$$

Unser Satz ist bewiesen, wenn für $Q + \bar{Q} = 0$ die Gleichung gilt:

$$(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})_{\bar{\vartheta}} = \mu(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}).$$

Es ist $d\vartheta = d\Psi + d\Psi$, und die invariante Ableitung einer Größe S nach der Linearform $d\bar{\vartheta}$ ist $S_{\bar{\vartheta}} = S_1 - S_2$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})_{\bar{\vartheta}} &= \boldsymbol{p}_{\bar{\vartheta}} + \boldsymbol{q}_{\bar{\vartheta}} \\ &= \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2 \\ &= (Q + \bar{Q})(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) + \mathfrak{B}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}). \end{aligned}$$

Man erkennt: Für $Q + \bar{Q} = 0$ ist in der Tat

$$(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})_{\bar{\vartheta}} = \mathfrak{B}(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}),$$

was zu beweisen war.

§ 2.[2])

Die Flächen: $\mathfrak{B} = \text{konst.}$; $Q = \bar{Q} = 0$.

Aus den Integrabilitätsbedingungen folgt

$$-\bar{N} = +L = -\mathfrak{B}^2; \quad N = 0, \quad \bar{L} = 0. \tag{10}$$

Die Ableitungsgleichungen (2) nehmen jetzt die Form an

$$\begin{aligned} p_1 &= -y; & q_1 &= \mathfrak{B} p, \\ p_2 &= -\mathfrak{B} q; & q_2 &= -y, \\ x_1 &= \frac{1}{2} q; & y_1 &= \mathfrak{B}^2 q, \\ x_2 &= \frac{1}{2} p; & y_2 &= \mathfrak{B}^2 p. \end{aligned} \tag{11}$$

Zunächst ergibt sich aus (10) wegen (5):

2. *Die Flächen sind Affinsphären.*

Ferner gilt der Satz:

3. *Auf den Flächen sind die Kurven $d\vartheta = 0$ ebene Kurven, und zwar geht die Ebene jeder Kurve $d\vartheta = 0$ durch den Mittelpunkt der Affinsphäre.*

Zum Beweise berechnen wir:

$$\begin{aligned} x_{\bar{\vartheta}} &= x_1 - x_2 = \frac{1}{2}(q - p), \\ x_{\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}} &= y - \frac{1}{2}\mathfrak{B}(q - p), \\ x_{\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}} &= \frac{3}{2}\mathfrak{B}^2(q - p) - \mathfrak{B} y. \end{aligned}$$

Hier erkennt man: $x_{\vartheta\vartheta}$, $x_{\vartheta\vartheta\vartheta}$ sind Linearkombinationen von y und x_ϑ. Die drei Punkte x_ϑ, $x_{\vartheta\vartheta}$, $x_{\vartheta\vartheta\vartheta}$ liegen also auf einer uneigentlichen Geraden, und die Kurven $d\vartheta = 0$ sind ebene Kurven. Die uneigentliche Gerade geht durch den Punkt y. Die Ebene der Kurve $d\vartheta = 0$ enthält demnach die Affinnormale des Flächenpunktes; sie geht also durch den Mittelpunkt der Affinsphäre. Damit ist der Satz bewiesen.

4. *Die Darboux-Kurven $d\vartheta = 0$ sind ebene Kurven, deren Ebenen sämtlich einander parallel sind.*

Wir bilden:

$$\begin{aligned} x_\vartheta &= -x_1 - x_2 = -\frac{1}{2}(p + q), \\ x_{\vartheta\vartheta} &= -\frac{1}{2}\mathfrak{B}(p - q) - y, \\ x_{\vartheta\vartheta\vartheta} &= \frac{3}{2}\mathfrak{B}^2(p + q) = -3\mathfrak{B}^2 x_\vartheta. \end{aligned}$$

[2]) Anmerkung: Die §§ 2, 3, 4 sind unabhängig voneinander.

Man sieht, daß die Determinante $|x_\vartheta\, x_{\vartheta\vartheta}\, x_{\vartheta\vartheta\vartheta}|$ verschwindet; die Kurven $d\vartheta = 0$ sind also ebene Kurven. Der Rest des Satzes ist eine unmittelbare Folge von Satz 1.

5. *Die längs einer Darboux-Kurve genommenen Tangentenebenen umhüllen einen Kegel.*

Die zur Darboux-Tangente konjugierte Tangente $\mathfrak{d}$ im Flächenpunkt x verbindet x mit $(q - p)$. Die Geraden $\mathfrak{d}$, genommen längs einer Darboux-Kurve, müssen die Erzeugenden des Kegels sein. Zum Beweise betrachten wir das Strahlensystem, welches von den Geraden $\mathfrak{d}$ gebildet wird, und berechnen den nicht mit x zusammenfallenden Brennpunkt a dieses Systems. Es sei

$$\bar{a} = x + \sigma(q - p)$$

ein Punkt des Strahles $\mathfrak{d}$. Jetzt bestimmen wir σ so, daß a_ϑ mit $(q - p)$ zusammenfällt. Dadurch erhält man für den Brennpunkt

$$\bar{a} = x - \frac{1}{2\mathfrak{B}}(q - p). \tag{12}$$

Der Satz ist bewiesen, wenn der Punkt $\bar{a}$ fest bleibt, während wir auf der Fläche längs einer Darboux-Kurve fortschreiten. In der Tat findet man

$$\bar{a}_\vartheta = 0.$$

Mit Hilfe des letzten Satzes kann man zeigen:

6. *Die Darboux-Kurven $d\vartheta = 0$ sind Kegelschnitte.* Zum Beweise betrachten wir längs einer Kurve $d\vartheta = 0$ die Haupttangenten $\mathfrak{p}$ unserer Fläche und ebenso die Haupttangenten $\mathfrak{q}$. Wir werden zeigen, daß diese beiden Scharen von Geraden ein und derselben Fläche zweiten Grades angehören, welche unsere Fläche längs der Darboux-Kurve berührt. Nach Parabol. Strahlensyst. § 8 ist der Mittelpunkt der von drei konsekutiven Haupttangenten des Systems $\mathfrak{p}$ gebildeten F_2

$$m = 4\mathfrak{B}^2 x - \{-\mathfrak{B}p + \mathfrak{B}q + y\}.$$

Für denjenigen des Systems $\mathfrak{q}$ erhält man denselben Ausdruck. Die Mittelpunkte fallen also zusammen. Schreiten wir jetzt auf der Darboux-Kurve $d\vartheta = 0$ fort, so bleibt m fest, denn es ist $m_\vartheta = 0$. Aus Satz 4 folgt jetzt unmittelbar die Richtigkeit von 6.

Nach Satz 5 und 6 umhüllen die längs einer Darboux-Kurve genommenen Tangentenebenen unserer Fläche einen quadratischen Kegel mit der Spitze $\bar{a}$ (Gleichung (12)).

7. *Schreiten wir von einer Darboux-Kurve zur anderen fort, so bewegt sich die Spitze a dieses Kegels auf einer Geraden.* Ihr uneigentlicher Punkt ist a_ϑ. Man berechnet $a_{\vartheta\vartheta} = -2\mathfrak{B}a_\vartheta$. Das heißt, der Punkt a_ϑ bleibt fest. Damit ist Satz 7 bewiesen.

Eine Zusammenfassung dieser Sätze läßt erkennen, daß die betrachteten Flächen vollkommen das Verhalten von *Rotationsflächen* zeigen, deren Parallelkreise die Darboux-Kurven, deren Meridiane die Kurven $d\vartheta = 0$ sind. Daraus folgt aber, daß die Flächen mit den von W. Blaschke[3]) angegebenen einzigen[4]) W-Flächen der *raumtreuen* Affinitäten übereinstimmen. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems genügen sie der Gleichung

$$z(x^2 + y^2) = 1. \tag{13}$$

§ 3.

Wenden wir uns jetzt zur Untersuchung der Flächen, für welche gilt $\mathfrak{B} = \text{konst.}\ Q = -\bar{Q} = \frac{1}{2}\mathfrak{B}$. Hier werden die Integrabilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} -N = +L &= -\tfrac{3}{2}\mathfrak{B}^2, \\ N = -\tfrac{3}{2}\mathfrak{B}^2; &\quad \bar{L} = -\tfrac{3}{2}\mathfrak{B}^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Für die Ableitungsgleichungen erhält man:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1 &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{y}, & \boldsymbol{q}_1 &= \mathfrak{B}\boldsymbol{p} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\boldsymbol{q}, \\ \boldsymbol{p}_2 &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\boldsymbol{p} - \mathfrak{B}\boldsymbol{q}; & \boldsymbol{q}_2 &= -\tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{x}_1 &= \tfrac{1}{2}\boldsymbol{q}; & \boldsymbol{y}_1 &= \tfrac{3}{2}\mathfrak{B}^2(-\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}), \\ \boldsymbol{x}_2 &= \tfrac{1}{2}\boldsymbol{p}; & \boldsymbol{y}_2 &= \tfrac{3}{2}\mathfrak{B}^2(+\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}). \end{aligned} \tag{15}$$

Es ist $NL - LN = 0$. Das bedeutet nach Parabol. Strahlensyst. § 7:

Die Affinnormalen schneiden sämtlich eine uneigentliche Kurve.

Aus der Differentialgleichung der Affinkrümmungslinien (4) folgt jetzt wegen $N = -L$

$$d\Psi^2 - d\bar{\Psi}^2 = 0.$$

Infolge Gleichung (6) folgt also der Satz:

Die Affinkrümmungslinien fallen mit den Darboux-Kurven $d\vartheta = 0$ und den dazu konjugierten $d\bar{\vartheta} = 0$ zusammen[5]).

Infolge des vorletzten Satzes ist $\boldsymbol{y}$ ein Brennpunkt des Affinnormalensystems. Gleichzeitig ist $\boldsymbol{y}$ der uneigentliche Punkt der Affinnormalen. Die

[3]) Blaschke II, § 89.

[4]) Anmerkung: Geradlinige und parabolisch gekrümmte Flächen sind dabei ausgeschlossen.

[5]) Es läßt sich leicht der allgemeinere Satz beweisen: *Sind auf einer Fläche die Darboux-Kurven $d\vartheta = 0$ ebene Kurven, dann sind sie zugleich Affinkrümmungslinien der Fläche und umgekehrt.*

Rechnung zeigt nun: $y_\vartheta = -y_1 - y_2 = 0$. Der Punkt y bleibt also fest, wenn man längs einer Darboux-Kurve fortschreitet. Daher gilt: *Längs einer Darboux-Kurve $d\vartheta = 0$ sind die Affinnormalen der Fläche einander parallel; sie bilden einen Zylinder.*

Es ist außerdem $Q + \bar{Q} = 0$. Es gilt der Satz 1, der aussagt, daß die Tangentenebenen längs einer Kurve $d\vartheta = 0$ einen Zylinder umhüllen. Der uneigentliche Punkt einer Darboux-Tangente ist $p + q$; wir bilden

$$(15a) \qquad (p+q)_\vartheta = -\mathfrak{B}(p-q) + 2y \quad \text{und} \quad (p+q)_{\vartheta\vartheta} = 0.$$

Das bedeutet aber: *Die Darboux-Kurven sind ebene Kurven, deren Ebenen sämtlich zueinander parallel sind.*

Schreiten wir längs einer Kurve $d\vartheta = 0$ fort, so beschreibt y eine uneigentliche Kurve. Diese ist eine Gerade; denn man erhält $y_{\vartheta\vartheta} = k y_\vartheta$. Es gilt also: *Die Affinnormalen der Fläche sind sämtlich zu einer Ebene parallel.*

Den zweiten Brennpunkt des Affinnormalensystems findet man zu

$$b = -6\mathfrak{B}^2 x + y.$$

Durch invariante Ableitung erhält man: $b_\vartheta = b_1 - b_2 = 0$. Daher folgt aus dem letzten Satz: *Die längs einer Kurve $d\vartheta = 0$ genommenen Affinnormalen bilden ein Strahlenbüschel mit der Spitze b.*

Daraus folgt weiter, daß auch die Kurven $d\vartheta = 0$ ebene Kurven sind, deren Ebenen untereinander parallel sind. Geht man längs einer Darboux-Kurve vorwärts, so läuft b auf einer Kurve, deren Tangente in entsprechenden Punkten zur Tangente der Darboux-Kurve parallel ist; denn es wird $b_\vartheta = x_\vartheta$. Da die Darboux-Kurven ebene Kurven sind, muß auch die von b durchlaufene Kurve eben sein und ihre Ebene zu den Ebenen der Darboux-Kurven parallel stehen. Daraus kann man schließen, daß alle Darboux-Kurven einander kongruent sind. Denn die Affinnormalen längs einer Darboux-Kurve bilden einen Zylinder, dessen Leitlinie die von b beschriebene Kurve ist, deren Ebene zur Ebene der Darboux-Kurve parallel geht. Daraus folgt weiter, daß auch die Kurven $d\vartheta = 0$ einander kongruent sind. *Die untersuchten Flächen sind also Schiebflächen, deren eine Schiebkurvenschar die Darboux-Kurven $d\vartheta = 0$, deren andere die konjugierten $d\bar{\vartheta} = 0$ sind.*

Bildet man die invarianten Ableitungen des Vektors x längs einer Darboux-Kurve $d\vartheta = 0$, also $x_\vartheta, x_{\vartheta\vartheta}, x_{\vartheta\vartheta\vartheta}, \ldots$, und ebenso längs einer konjugierten Kurve $d\bar{\vartheta} = 0$, also $x_{\bar{\vartheta}}, x_{\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}}, x_{\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}}, \ldots$, und beachtet man die Bedeutung solcher invarianten Ableitungen, so lassen sich leicht die Schiebkurven bestimmen. Die auf ein und dieselbe Linearform bezogenen invarianten Ableitungen haben doch den Sinn: Auf der betrachteten Kurve ist durch die Linearform ein invarianter Parameter definiert; die Diffe-

rentiation nach diesem Parameter gibt die auf die Linearform bezogene invariante Ableitung (vgl. Parabol. Strahlensyst. § 2). Nach Gleichung (15a) ist

$$\boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta\vartheta} = -(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})_{\vartheta\vartheta} = 0.$$

Auf Grund der Bedeutung der invarianten Ableitungen besagt dies: Längs einer Darboux-Kurve kann man einen solchen Parameter einführen (etwa t), daß die dritte Ableitung $\frac{d^3\boldsymbol{x}}{dt^3}$ identisch verschwindet. Daraus folgt sofort:

Die Darboux-Kurven der Flächen sind Parabeln.

Berechnet man die invarianten Ableitungen längs der konjugierten Kurve $d\bar{\vartheta} = 0$, so erhält man

$$\boldsymbol{x}_{\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}} = -\mathfrak{B}\,\boldsymbol{x}_{\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}} + 6\,\mathfrak{B}^2\,\boldsymbol{x}_{\bar{\vartheta}}.$$

Auf der Kurve läßt sich also ein Parameter s einführen, daß der die Kurve beschreibende Vektor $\boldsymbol{x}$ die Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{d^3\boldsymbol{x}}{ds^3} = -\mathfrak{B}\frac{d^2\boldsymbol{x}}{ds^2} + 6\,\mathfrak{B}^2\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}.$$

Eine solche Kurve kann aber, auf ein geeignetes kartesisches ξ-η-Koordinatensystem bezogen, durch die Gleichung dargestellt werden:

$$\xi^2\eta^3 = 1.$$

Damit ist auch die zweite Schar der Schiebkurven bestimmt.

§ 4.

Es mag zunächst sehr willkürlich erscheinen, die Flächen zu untersuchen, deren Invarianten die Bedingungen erfüllen:

$$Q = -\bar{Q} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{B}. \tag{17}$$

Doch wird das Ergebnis das Unternehmen rechtfertigen. Geht man mit (17) in die Integrabilitätsbedingungen (3), so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} -(N + \bar{L}) &= \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2, \\ -\bar{N} = L &= \frac{1}{2}(N - \bar{L}), \\ \bar{L}_1 + N_1 + \bar{L}_2 + N_2 &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Die invariante Ableitung der Größe $\mathfrak{B}$ längs einer Darboux-Kurve ist

$$\mathfrak{B}_\vartheta = -(\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2).$$

Daher wird nach (18)

$$N + \bar{L} = \mathfrak{B}_\vartheta$$

und

$$\bar{L}_1 + N_1 + \bar{L}_2 + N_2 = -\mathfrak{B}_{\vartheta\vartheta} = 0. \tag{19}$$

Die Ableitungsgleichungen für die Tetraedereckpunkte (2) werden jetzt:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{p}_1 = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{B}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{y}; && \boldsymbol{q}_1 = \mathfrak{B}\boldsymbol{p} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{B}\boldsymbol{q},\\
&\boldsymbol{p}_2 = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{B}\boldsymbol{p} - \mathfrak{B}\boldsymbol{q}; && \boldsymbol{q}_2 = -\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{B}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{y},\\
&\boldsymbol{x}_1 = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{q}; && \boldsymbol{y}_1 = N\boldsymbol{p} - L\boldsymbol{q},\\
&\boldsymbol{x}_2 = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{p}; && \boldsymbol{y}_2 = \bar{N}\boldsymbol{p} - \bar{L}\boldsymbol{q},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

und diejenigen für die Tetraederkanten:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{p}_1 = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{B}\mathfrak{p} - \mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{w}; && \mathfrak{u}_1 = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{B}\mathfrak{u} - L\mathfrak{w},\\
&\mathfrak{p}_2 = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{B}\mathfrak{p} + \mathfrak{B}\mathfrak{q}; && \mathfrak{u}_2 = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{B}\mathfrak{u} - \mathfrak{B}\mathfrak{v} - \bar{L}\mathfrak{w},\\
&\mathfrak{q}_1 = -\mathfrak{B}\mathfrak{p} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{B}\mathfrak{q}; && \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{u} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{B}\mathfrak{v} - N\mathfrak{w},\\
&\mathfrak{q}_2 = -\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{B}\mathfrak{q} + \mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{w}; && \mathfrak{v}_2 = -\tfrac{1}{2}\,\mathfrak{B}\mathfrak{v} - \bar{N}\mathfrak{w},\\
&\mathfrak{y}_1 = N\mathfrak{p} + L\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{v}; && \mathfrak{w}_1 = \mathfrak{v},\\
&\mathfrak{y}_2 = \bar{N}\mathfrak{p} + \bar{L}\mathfrak{q} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{u}; && \mathfrak{w}_2 = -\mathfrak{u}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Es empfiehlt sich, ein neues Grundtetraeder einzuführen, dessen Kanten die durch den betrachteten Flächenpunkt $\boldsymbol{x}$ gehende Darboux-Tangente $\mathfrak{d}$ und die dazu konjugierte Tangente $\bar{\mathfrak{d}}$ sind. Es ist

$$
\mathfrak{d} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{q} - \mathfrak{p}); \qquad \bar{\mathfrak{d}} = -\tfrac{1}{2}(\mathfrak{q} + \mathfrak{p}).
\tag{22}
$$

Als weitere Kanten kommen hinzu die Affinnormale $\mathfrak{y}$ und die drei die uneigentlichen Punkte $\boldsymbol{d}$, $\bar{\boldsymbol{d}}$, $\boldsymbol{y}$ verbindenden Geraden

$$
\mathfrak{w}, \qquad \mathfrak{m} = -(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}), \qquad \mathfrak{n} = \mathfrak{u} - \mathfrak{v}.
$$

Die invarianten Ableitungen nach den Linearformen $d\vartheta = d\Psi - d\Psi$ und $d\bar{\vartheta} = d\Psi + d\Psi$, bezogen auf das neue Grundtetraeder, werden dann:

Für die Tetraedereckpunkte:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{x}_\vartheta = \boldsymbol{d}; && \boldsymbol{d}_\vartheta = -2\mathfrak{B}\bar{\boldsymbol{d}} - \boldsymbol{y},\\
&\boldsymbol{x}_{\bar{\vartheta}} = \bar{\boldsymbol{d}}; && \boldsymbol{d}_{\bar{\vartheta}} = \mathfrak{B}\boldsymbol{d},\\
&\boldsymbol{y}_\vartheta = \mathfrak{B}_\vartheta\bar{\boldsymbol{d}}; && \bar{\boldsymbol{d}}_\vartheta = 0,\\
&\boldsymbol{y}_{\bar{\vartheta}} = -\mathfrak{B}_{\bar{\vartheta}}\boldsymbol{d} + 2(L - N)\boldsymbol{d}; && \boldsymbol{d}_{\bar{\vartheta}} = -\mathfrak{B}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{y},
\end{aligned}
\tag{23}
$$

und für die Tetraederkanten:

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
&\mathfrak{d}_\vartheta = -2\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{d}} - \mathfrak{y}; && \mathfrak{m}_\vartheta = 2\mathfrak{B}\mathfrak{n} - \mathfrak{B}_\vartheta \mathfrak{w},\\
&\mathfrak{d}_{\bar\vartheta} = \mathfrak{B}\mathfrak{d} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{w}; && \mathfrak{m}_{\bar\vartheta} = \mathfrak{B}\mathfrak{m} - 2\bar{L}\mathfrak{w},\\
&\bar{\mathfrak{d}}_\vartheta = -\tfrac{1}{2}\mathfrak{w}; && \mathfrak{n}_\vartheta = 0,\\
&\bar{\mathfrak{d}}_{\bar\vartheta} = -\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{d}} + \mathfrak{y}; && \mathfrak{n}_{\bar\vartheta} = -\mathfrak{B}\mathfrak{n} + \mathfrak{B}_\vartheta \mathfrak{w},\\
&\mathfrak{y}_\vartheta = \mathfrak{B}_\vartheta \bar{\mathfrak{d}} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{m}; && \mathfrak{w}_\vartheta = \mathfrak{n},\\
&\mathfrak{y}_{\bar\vartheta} = -\mathfrak{B}_\vartheta \mathfrak{d} + 2(L - N)\bar{\mathfrak{d}}; && \mathfrak{w}_{\bar\vartheta} = -\mathfrak{m}.
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (19), (23), (24) geben das formale Gerüst, aus dem die geometrischen Eigenschaften unserer Flächenklasse hergeleitet werden sollen.

Satz I. *Die Flächen sind Schiebflächen, deren eine Schar von Erzeugenden Darboux-Kurven sind.*

Die Richtigkeit des Satzes folgt sofort aus den neuen Ableitungsgleichungen: Der uneigentliche Punkt der Darboux-Tangente ist $\boldsymbol{d}$. Schreitet man in der konjugierten Richtung $d\bar\vartheta = 0$ fort, so bleibt $\boldsymbol{d}$ fest, denn es ist $\boldsymbol{d}_{\bar\vartheta} = \mathfrak{B}\boldsymbol{d}$. Ebenso bleibt der uneigentliche Punkt $\bar{\boldsymbol{d}}$ fest, wenn wir längs der Darboux-Kurve $d\bar\vartheta = 0$ fortschreiten, da $\boldsymbol{d}_\vartheta = 0$. Am Ende dieses Paragraphen wird gezeigt werden, daß der obige Satz eine kennzeichnende Eigenschaft der Flächen ausdrückt.

Betrachten wir zunächst die Umgebung eines Flächenpunktes $\boldsymbol{x}$. Im Punkt $\boldsymbol{x}$ besitzen die Schiebkurven je eine Schmiegebene. Für die Kurve $d\vartheta = 0$ wird diese aufgespannt durch die Geraden $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_\vartheta$, für die konjugierte Kurve $\delta\vartheta = 0$ durch $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_{\bar\vartheta}$. Aus (24) ist ersichtlich, daß die Schnittgerade dieser beiden Ebenen durch den Vektor

$$
(25)\qquad \mathfrak{s} = \mathfrak{d}_\vartheta = -2\mathfrak{B}\mathfrak{d} - \mathfrak{y}
$$

gegeben wird; denn $\mathfrak{s}$ liegt einerseits in der Ebene $\{\mathfrak{d}, \mathfrak{y}\}$, andererseits in der Schmiegebene $\{\mathfrak{d}, \mathfrak{d}_\vartheta\}$, und die Schmiegebene $\{\bar{\mathfrak{d}}, \bar{\mathfrak{d}}_\vartheta\}$ fällt mit $\{\mathfrak{d}, \mathfrak{y}\}$ zusammen. Vergleicht man hiermit die Formeln über das Paar der Krümmungskegel (Parabol. Strahlensyst. § 8), so erkennt man, daß $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{s}$ die beiden reellen Schnittgeraden des Kegelpaares sind.

Interessanter ist es, einen Einblick in die Struktur der Flächen im großen zu gewinnen. Einen solchen vermitteln, abgesehen von Satz I, die folgenden Sätze:

Satz II. *Die Schiebkurven, die zugleich Darboux-Kurven sind, sind kubische Parabeln.*

Der Beweis ist leicht, wenn man sich an die Bedeutung der invarianten Ableitungen erinnert (Parabol. Strahlensyst. § 2). Es galt nämlich für diese Ableitungen längs einer bestimmten Kurve $d\vartheta = 0$ folgendes: Auf der betrachteten Kurve ist ein invarianter Parameter gewählt, und die invarianten Ableitungen sind nichts anderes als die Differentialquotienten nach diesem Parameter. Auf der durch den betrachteten Flächenpunkt gehenden reellen Darboux-Kurve bedeuten also $\boldsymbol{x}_\vartheta, \boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta}, \ldots$ die Differentialquotienten des Vektors[6]) $\boldsymbol{x}$ nach einem bestimmten invarianten Parameter. Allerdings ist zu beachten, daß sich dieser Parameter von einer Darboux-Kurve zur anderen ändert. Nun sind aber die Komponenten des homogenen Vierervektors $\boldsymbol{x}$ so normiert, daß $\boldsymbol{W}\boldsymbol{x} = 1$ wird (Parabol. Strahlensyst. § 4). Normieren wir jetzt noch den Vektor $\boldsymbol{W}$ zu $(0, 0, 0, 1)$, d. h. geometrisch: wir beschränken uns auf raumtreue affine Transformationen, so besitzt $\boldsymbol{x}$ als vierte Komponente den Wert 1 (wegen $\boldsymbol{W}\boldsymbol{x} = 1$), und wir können $\boldsymbol{x}$ als gewöhnlichen, inhomogenen Dreiervektor ansehen. Längs der betrachteten Darboux-Kurve ist also der inhomogene Vektor $\boldsymbol{x}$ Funktion eines invarianten Parameters. Daraus folgt aber, daß die Blaschkeschen Formeln der affinen Kurventheorie unmittelbar für unsere Darboux-Kurven übernommen werden dürfen. Wir bilden

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_\vartheta &= \boldsymbol{d}, \\ \boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta} &= -2\mathfrak{B}\boldsymbol{d} - \boldsymbol{y}, \\ \boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta\vartheta} &= -3\mathfrak{B}_\vartheta \boldsymbol{d} \end{aligned} \tag{26}$$

und erhalten für die Determinante

$$|\boldsymbol{x}_\vartheta \boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta} \boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta\vartheta}| = 3\mathfrak{B}_\vartheta .$$

$\mathfrak{B}_\vartheta$ ist aber auf Grund der Integrabilitätsbedingung (19) längs einer Darboux-Kurve konstant, so daß also auch die Determinante $\boldsymbol{x}_\vartheta \boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta} \boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta\vartheta}$ längs jeder Darboux-Kurve konstant ist. Der invariante Parameter ist deshalb bis auf einen konstanten Faktor gleich der Affinbogenlänge der Kurve (Blaschke II, § 29), und die Ableitungen $\boldsymbol{x}_\vartheta, \boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta}, \ldots$ stimmen bis auf einen konstanten Faktor mit den Ableitungen nach der Affinbogenlänge überein. Die affine Krümmung und Torsion der Kurven werden (Blaschke II, § 29) bis auf einen konstanten Faktor gegeben durch die Determinanten

$$k = |\boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta\vartheta\vartheta} \boldsymbol{x}_\vartheta \boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta\vartheta}| ; \qquad t = |\boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta\vartheta\vartheta} \boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta} \boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta\vartheta}| .$$

Da aber aus (26) folgt, daß $\boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta\vartheta\vartheta} = 0$ ist, so werden für unsere Darboux-Kurven $k = 0$; $t = 0$. Das bedeutet aber nach Blaschke II, § 31, daß die Kurven kubische Parabeln sind.

[6]) Die Bezeichnung Vektor ist hier nicht ganz zutreffend: seine Komponenten sind einfach die inhomogenen Koordinaten eines Kurvenpunktes.

Auch die zweite Schar der Schiebkurven $d\bar{\vartheta} = 0$ ist nicht willkürlich, sondern es gilt der

Satz III. *Die zweite Schar der Schiebkurven besteht aus Gewindekurven*; d. h. die Tangenten einer Kurve $d\bar{\vartheta} = 0$ gehören einem linearen Komplex an.

Da $\mathfrak{d}$ Tangente an die Kurve $d\bar{\vartheta} = 0$ ist, so muß also die Determinante

$$|\mathfrak{d}\ \mathfrak{d}_{\vartheta}\ \mathfrak{d}_{\vartheta\bar{\vartheta}}\ \mathfrak{d}_{\vartheta\vartheta\bar{\vartheta}}\ \mathfrak{d}_{\vartheta\bar{\vartheta}\vartheta\bar{\vartheta}}\ \mathfrak{d}_{\vartheta\vartheta\bar{\vartheta}\vartheta\bar{\vartheta}}| = 0$$

verschwinden. Es ist nun nicht nötig, die fünf invarianten Ableitungen wirklich auszurechnen. Es tritt nämlich in der Linearkombination jeder der ersten vier Ableitungen jedesmal genau ein neuer linearunabhängiger Sechservektor hinzu, nicht aber bei der fünften Ableitung. Daher sind $\bar{\mathfrak{d}}$ und die ersten fünf Ableitungen Linearkombinationen von nur fünf unabhängigen Vektoren. Die Determinante muß also verschwinden.

Nach den beiden letzten Sätzen entstehen die Flächen dadurch, daß eine kubische Parabel längs einer Gewindekurve verschoben wird. Es erhebt sich die Frage, wie die beiden Kurven zueinander stehen. Aus dem Beweis des Satzes II folgt, da ja die invarianten Ableitungen $\boldsymbol{x}_{\vartheta}, \boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta}, \ldots$ im wesentlichen mit den Ableitungen nach der Affinbogenlänge übereinstimmen, daß die Gerade $\mathfrak{d}_{\vartheta} = -2\mathfrak{B}\mathfrak{d} - \mathfrak{y}$ mit der Affinhauptnormalen der kubischen Parabel zusammenfällt. Nach (25) stimmt aber $\mathfrak{d}_{\vartheta}$ mit $\mathfrak{s}$ überein. Es gilt daher der

Satz IV. *Die Lage der kubischen Parabel zur Gewindekurve ist derart, daß die Schnittgerade $\mathfrak{s}$ der Schmiegungsebenen der beiden Kurven (Schmiegungsgerade*[7]*) zugleich die Affinhauptnormale der kubischen Parabel ist.*

Die Stellung der kubischen Parabel zur Gewindekurve wird noch völlig bestimmt durch den folgenden

Satz V. *Die Affinbinormale der kubischen Parabel fällt mit der Tangente $\mathfrak{d}$ der Gewindekurve zusammen.*

Nach Blaschke II, § 30 wird die Affinbinormale einer Kurve $\boldsymbol{x}(s)$ gegeben durch den Vektor

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}''' + \frac{k}{4}\boldsymbol{x}'.$$

Da bei der kubischen Parabel $k = 0$ ist, können wir wieder statt der Ableitung nach der Affinbogenlänge die invariante Ableitung nach der Linearform $d\vartheta$ setzen. Dann erhält man als Bestätigung des letzten Satzes

$$\boldsymbol{x}_{\vartheta\vartheta\vartheta} = -3\mathfrak{B}_{\vartheta}\boldsymbol{d}.$$

[7]) E. Salkowski, Affinminimalflächen und Gewindekurven, Sitzungsber. d. Berl. Math. Gesellsch. 22, S. 114f.

Es bleibt noch ein Satz über die Flächen, deren Invarianten den Bedingungen (17) genügen, zu beweisen, welcher erst der Untersuchung dieser Flächenklasse einiges Interesse verleiht:

Satz VI. *Die Flächen, deren Invarianten der Bedingung genügen:*

$$Q - \overline{Q} = \frac{1}{2}\mathfrak{B},$$

sind die einzigen (reellen) Schiebflächen, deren Erzeugende Darboux-Kurven sind.

Sollen nämlich die reellen Darboux-Kurven Schiebkurven einer Fläche sein, so müssen die längs einer konjugierten Kurve $d\bar{\vartheta} = 0$ genommenen Darboux-Tangenten die Erzeugenden eines Zylinders sein. Dies ist aber nur der Fall, wie aus dem Beweis des Satzes 1 folgt, wenn

$$Q + \overline{Q} = 0. \tag{27}$$

Die zweite Schar der Schiebkurven sind die Kurven $d\vartheta = 0$. Es müssen also auch die längs einer Darboux-Kurve genommenen Tangenten an eine Kurve $d\vartheta = 0$ einen Zylinder umhüllen. D. h. der uneigentliche Punkt $\boldsymbol{x}_\vartheta$ einer solchen Tangente muß fest bleiben, wenn man längs einer Darboux-Kurve fortschreitet. Es muß also eine Gleichung der Form gelten:

$$\boldsymbol{x}_{\bar{\vartheta}\,\vartheta} = \mu \boldsymbol{x}_{\bar{\vartheta}},$$

wo μ irgendeine skalare Funktion, auch Null sein kann. Aus (2) erhält man, wegen $\boldsymbol{x}_\vartheta = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p})$ und $\boldsymbol{x}_{\bar{\vartheta}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p})$,

$$\boldsymbol{x}_{\bar{\vartheta}\,\vartheta} = (\mathfrak{B} - Q + \overline{Q})(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}).$$

Die Beziehung $\boldsymbol{x}_{\bar{\vartheta}\,\vartheta} = \mu \boldsymbol{x}_{\bar{\vartheta}}$ würde ergeben

$$(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q})(\mathfrak{B} - Q + \overline{Q}) = (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}).$$

Das kann aber nur gelten, wenn

$$\mathfrak{B} - Q + \overline{Q} = 0.$$

In Verbindung mit (27) folgt aber daraus

$$\frac{1}{2}\mathfrak{B} - Q = -\overline{Q}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

(Eingegangen am 2. Februar 1931.)

Über die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex.

Von

Julius v. Sz. Nagy in Szeged (Ungarn).

1. Einleitung.

Unter einer *Kurve* verstehen wir im folgenden eine stetige und geschlossene ebene Kurve, die aus endlichvielen konvexen Bögen besteht und in jedem Punkte eine bestimmte mit dem Berührungspunkte sich stetig ändernde Tangente hat. Die Klasse bzw. der Klassenindex der Kurve ist die größte bzw. kleinste Anzahl der Tangenten, die von einem Punkte ihrer Ebene ausgehen. Der duale Begriff ist die Ordnung bzw. der Index der Kurve.

Bilden die Punkte der Ebene, aus denen $n-2$ Tangenten an die Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex gezogen werden können, k zusammenhängende Gebiete $T_1, T_2, \ldots, T_k$ mit den Zusammenhängen $p_1+1, p_2+1, \ldots, p_k+1$, so definiert man das Geschlecht p der Kurve C durch die Gleichung

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_k - k + 1.$$

Ist $k=1$, so ist die Kurve C irreduzibel. Ist aber $k>1$, so zerfällt sie in k irreduzible Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Die Kurve C_h $(h=1,2,\ldots,k)$ besteht aus den Zügen der Kurve C, von denen das Gebiet T_h begrenzt wird[1]).

Bezeichnet r die Anzahl der Spitzen erster Art, t bzw. w die Anzahl der Doppeltangenten bzw. der Wendetangenten ($w=0$ oder 1), so bestehen die Gleichungen[2])

$$r = n-2+2p, \qquad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - t - w.$$

[1]) J. v. Sz. Nagy, Über Kurven vom Maximalklassenindex. Über Kurven vom Maximalindex, Math. Annalen **89** (1923), S. 32–75; **90** (1924), S. 152–153. Diese Arbeit wird im folgenden unter A zitiert werden. Vgl. § 21, S. 69–71.

[2]) J. v. Sz. Nagy, Über die charakteristischen Zahlen einer Kurve vom Maximalklassenindex, Math. Annalen **100** (1928), S. 164–178; Über die Züge der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex, Math. Annalen **100** (1928), S. 179–187. Diese zwei Arbeiten werden im folgenden unter B bzw. C zitiert werden.

Durch die charakteristischen Zahlen n, p, r, w, t ist aber die Ordnung m der Kurve C vom Maximalklassenindex nicht bestimmt. Diese Zahlen bestimmen nur das Maximum der Ordnung.

Wir beweisen unter anderen den folgenden Hauptsatz:

Es gibt Kurven n-ter Klasse vom Maximalklassenindex, deren Ordnung

$$m = M = 2n - 2 + 2p - w = n + r - w = n(n-1) - 2t - 3w$$

ist, wo p das Geschlecht der Kurve, r die Anzahl ihrer Spitzen, w bzw. t die Anzahl ihrer Wende- bzw. Doppeltangenten bedeutet.

Wir beweisen, daß M die Maximalordnung der Kurven n-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte p ist, wenn die Züge der Kurven alle vom Index Null sind, oder wenn der eine Zug vom Index Zwei ist und die übrigen Züge vom Index Null sind, oder wenn die Kurven unpaar sind.

In einer nächstfolgenden Arbeit werden wir beweisen, daß die Maximalordnung jeder Kurve n-ter Klasse vom Geschlechte p und vom Maximalklassenindex die Zahl M ist[3]).

2. Über die Minimalordnung der Kurven n-ter Klasse vom Maximalklassenindex.

Die Ebene wird von einer einzügigen Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex ohne Wendetangente in zwei Gebiete geteilt. Das eine Gebiet, welches hier mit G bezeichnet wird, ist einfach zusammenhängend. Aus den Punkten des Gebietes G kann die konkave bzw. die konvexe Seite der Kurve C erreicht werden, je nachdem die Kurve C vom Geschlechte Null bzw. Eins ist.

Aus den Gleichungen

$$r = n - 2 + 2p \quad \text{und} \quad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - t - w$$

folgt, daß eine paare Kurve C $n(\geqq 4)$-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte Null bzw. Eins wenigstens zwei Spitzen bzw. wenigstens eine Doppeltangente haben muß. Im Falle $p = 0$ hat die durch die zwei Spitzen hindurchgehende Gerade g_1 auch innere Punkte des Gebietes G, im Falle $p = 1$ hat die Doppeltangente g_2 auch innere Punkte des entsprechenden Gebietes G. Die Gerade g_1 bzw. g_2 schneidet im allgemeinen die Grenze des Gebietes G in den zwei Spitzen bzw. in den zwei Berührungspunkten nicht, sie hat also noch wenigstens zwei Punkte der Grenze von G, weil ein einfach zusammenhängendes ebenes Gebiet eine ganze Gerade nicht enthalten kann. Die Kurve C $n(\geqq 4)$-ter Klasse (vom

[3]) Diese Sätze wurden erst in den ungarischen Arbeiten des Verfassers bewiesen, Math. u. Naturwiss. Anzeiger der ungarischen Akademie der Wiss. **44** (1927), S. 446 bis 476; **45** (1928), S. 245—277.

Maximalklassenindex) vom Geschlechte Null bzw. Eins wird also von der Geraden g_1 bzw. g_2 in wenigstens 6 Punkten getroffen.

Eine Epizykloide, die — wie bekannt — von einem Punkte des Randes auf einem festen Kreise (außerhalb dieses festen Kreises) rollenden Kreises gezeichnet wird, ist eine Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte Null, wenn der Radius des rollenden Kreises $(n-2)$-mal kleiner ist als derjenige des festen Kreises. Ähnlicherweise stellt eine Hypozykloide eine Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte Eins dar, wenn der Radius des rollenden Kreises n-mal kleiner ist als derjenige des festen Kreises[4]). Man sieht leicht ein, daß beide Kurven von sechster Ordnung sind, wenn $n \geqq 4$ ist.

Es gilt also der

Satz I. *Die Minimalordnung der einzügigen paaren Kurven $n(\geqq 4)$-ter Klasse vom Maximalklassenindex ist sechs. Es gibt für jede ganze Zahl $n \geqq 4$ einzügige Kurven n-ter Klasse sechster Ordnung vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte Null oder Eins.*

Hat eine einzügige Kurve $n(\geqq 4)$-ter Klasse vom Maximalklassenindex eine Wendetangente, so hat sie Doppeltangenten. Von einer Doppeltangente wird die unpaare Kurve außerhalb der in den Berührungspunkten fallenden vier Punkte wenigstens noch in einem Punkte getroffen. Es gilt also der

Satz II. *Die Ordnung der einzügigen unpaaren Kurven vom Maximalklassenindex ist wenigstens fünf, wenn ihre Klassen wenigstens vier sind.*

Für die Kurven C zweiter oder dritter Klasse gelten die Sätze I und II nicht. Die Ordnung der Kurven zweiter Klasse ist nämlich 2. Die Ordnung der Kurven dritter Klasse ist 3 bzw. 4 oder 6, je nachdem die Kurve unpaar bzw. paar ist.

Für mehrzügige Kurven $n(\geqq 4)$-ter Klasse vom Maximalklassenindex gelten die Sätze I und II nicht ohne weiteres. Man kann leicht den folgenden Satz einsehen:

Satz III. *Es gibt für jede ganze Zahl $k \geqq 2$ Kurven $2k$-ter Klasse vierter Ordnung vom Maximalklassenindex. Diese Kurven bestehen aus k (genug kleinen) Ovalen, von denen keine zwei einander schneiden oder umschließen.*

Wir beweisen jetzt den folgenden

Satz IV. *Die Ordnung einer Kurve $n(\geqq 4)$-ter Klasse vom Maximalklassenindex, die wenigstens einen von Ovalen abweichenden Zug hat, ist wenigstens $6-w$, wo w die Anzahl der Wendetangenten der Kurve ist $(w = 0$ oder $1)$.*

[4]) A, S. 40.

Ist Z ein von Ovalen abweichender Zug einer Kurve C $n(\geqq 4)$-ter Klasse vom Maximalklassenindex, so können wir annehmen, daß er von dritter Klasse und von dritter oder vierter Ordnung ist. In einem anderen Falle wäre nämlich auch die Ordnung des Zuges Z wenigstens $6 - w$.

Ist der Zug Z von dritter Ordnung, so hat er eine Spitze S und eine Wendetangente. Der unpaare Zug Z wird von den Geraden, die durch die Spitze S hindurchgehen, in je drei Punkten getroffen. Ist nun P ein beliebiger Punkt eines anderen Zuges der Kurve, der notwendigerweise paar ist, so hat die Gerade SP wenigstens $3 + 2 = 5$ gemeinsame Punkte mit der Kurve C.

Ist der Zug Z von vierter Ordnung, so ist er vom Geschlechte Eins. Das Gebiet G, aus dessen Punkten die konvexe Seite des Zuges erreicht werden kann, ist also einfach zusammenhängend. Die Tangenten des Zuges schneiden im allgemeinen die Grenze von G in den Berührungspunkten nicht, sie müssen also noch zwei Punkte mit der Grenze des einfach zusammenhängenden Gebietes G, d. h. mit dem Zuge Z gemeinsam haben. Ist nun P ein beliebiger Punkt eines anderen Zuges, so kann man aus P wenigstens eine Tangente an den Zug dritter Klasse ziehen. Die Kurve C wird also von dieser Tangente in wenigstens $6 - w$ Punkten getroffen.

Damit ist der Satz IV bewiesen.

3. Die Ordnung der einzügigen Kurven vom Maximalklassenindex und vom Index Null.

Hat die einzügige Kurve C vom Maximalklassenindex den Index Null, so gibt es in der Ebene der Kurve eine Gerade g_0, von der die Kurve nicht getroffen wird. Dreht man diese Gerade um einen ihrer Punkte P unter dem Winkel π in der positiven Richtung rings herum, so verändert sich die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Kurve C und der durch den Punkt P hindurchgehenden Geraden g während der Drehung um je zwei, sobald die Gerade g durch eine Spitze oder durch eine Tangente der Kurve C hindurchschreitet. Bezeichnet x bzw. y die Anzahl der Zunahmen bzw. Abnahmen von den gemeinsamen Punkten der Kurve C und der Geraden g, ist r die Anzahl der Spitzen der Kurve und ist μ die Anzahl der Tangenten, die aus dem Punkte P an die Kurve C gezogen werden können, so bestehen die Gleichungen[5])

$$x - y = 0 \quad \text{und} \quad x + y = r + \mu .$$

[5]) Durch einen ähnlichen Beweisgang beweist Herr C. Juel in der Abhandlung: Die gewundenen Kurven vom Maximalindex auf einer Regelfläche zweiter Ordnung, Det Kgl. Vidensk. Selskab. Nat. og Math., Afd. 8, Raekke II. 5 (1917), S. 291–292, daß eine Gerade des Raumes höchstens $2n - 2$ Tangenten einer genannten Raumkurve n-ter Ordnung vom Maximalindex schneiden kann.

Eine Gerade g hat höchstens $2x$ gemeinsame Punkte mit der Kurve C. Dieses Maximum tritt nur dann auf, wenn die x Zunahmen der gemeinsamen Punkte der Kurve C und der sich bewegenden Geraden g aufeinander folgen, ohne daß eine Abnahme inzwischen aufträte. Bezeichnet m die Ordnung der Kurve C, so besteht die Ungleichung

$$m \leqq 2x = r + \mu .$$

Die paare Kurve C teilt die Ebene in zwei Gebiete. Das eine Gebiet, welches die Gerade g_0 und somit den Punkt P enthält, ist zweifach zusammenhängend. Ist die Kurve C von n-ter Klasse, so gehen n bzw. $n-2$ Tangenten aus dem Punkte P an sie, je nachdem das Geschlecht der Kurve Null oder Eins ist. Nach der Gleichung $r = n - 2 + 2p$ ist r gleich $n-2$ bzw. n, je nachdem das Geschlecht p Null oder Eins ist. In beiden Fällen ist also

$$2x = r + \mu = 2n - 2 \quad \text{und} \quad m \leqq r + \mu = 2n - 2 .$$

Es gibt für jede ganze Zahl $n > 2$ im Endlichen liegende einzügige Kurven n-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte Null

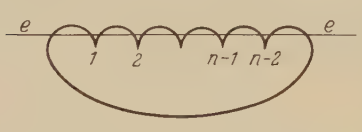


Fig. 1.

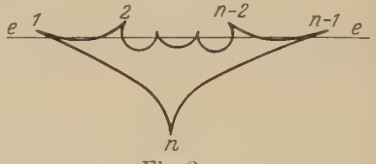


Fig. 2.

oder Eins, deren Ordnung $2n-2$ ist, wie man an den Figuren 1 und 2 leicht einsehen kann.

Die Fig. 1 bzw. 2 stellt eine Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex dar, weil sie ein $(n-2)$-seitiges konvexes bzw. ein n-seitiges konkaves Bogenpolygon ist[6]). Das Geschlecht der Kurve 1 ist Null, dasjenige der Kurve 2 ist Eins. Beide Kurven werden von der Geraden e in $2n-2$ Punkten geschnitten.

Es gilt also der

Satz V. *Die Maximalordnung der einzügigen Kurven n-ter Klasse vom Maximalklassenindex, die sich ins Endliche projizieren lassen, ist $2n-2$. Es gibt für jede $n(>2)$-Klasse im Endlichen liegende einzügige Kurven n-ter Klasse und $(2n-2)$-ter Ordnung vom Maximalklassenindex, die das Geschlecht Null oder Eins haben.*

Aus den Sätzen IV und V folgt der

Satz VI. *Es gibt für jede der Ungleichung*

$$6 \leqq m \leqq 2n - 2$$

[6]) A, S. 36–41.

genügende gerade Zahl m im Endlichen liegende einzügige Kurven n-ter Klasse m-ter Ordnung vom Maximalklassenindex, die das Geschlecht Null oder Eins haben.

Wir haben in einer vorigen Arbeit[7]) gewisse stetige Deformationen definiert, von denen die Klasse, der Klassenindex, die Anzahl der Doppeltangenten und der Spitzen und das Geschlecht einer Kurve vom Maximalklassenindex nicht verändert werden. Es ist klar, daß eine Epi- bzw. Hypozykloide n-ter Klasse sechster Ordnung vom Maximalklassenindex, die im vorigen Paragraphen definiert wurden, durch die erwähnten stetigen Deformationen sich in eine im Endlichen liegende Kurve vom Maximalklassenindex (vom Geschlechte Null bzw. Eins) überführen läßt, deren Spitzen alle bzw. — mit der Ausnahme einer Spitze — alle auf einer Geraden liegen. Diese neue Kurve ist aber von $(2n-2)$-ter Ordnung. Damit ist der Satz VI bewiesen, weil die Ordnung der Kurve während der Deformationen nur um eine gerade Zahl geändert wird.

4. Die Ordnung der mehrzügigen Kurven vom Maximalklassenindex, die aus Zügen vom Index Null bestehen.

Ist C eine irreduzible Kurve n-ter Klasse m-ter Ordnung vom Maximalklassenindex, die aus h Zügen besteht, deren Klassen bzw. Ordnungen $n_1, n_2, \ldots, n_h$ bzw. $m_1, m_2, \ldots, m_h$ sind, so besteht die Gleichung

$$n-2=(n_1-2)+(n_2-2)+\ldots+(n_h-2)=n_1+n_2+\ldots+n_h-2h$$

zwischen den Klassenindizes der Kurve und ihrer Züge[8]). Sind die Züge der Kurve C alle vom Index Null, so bestehen die Ungleichungen

$$m_1 \leqq 2n_1-2,\ m_2 \leqq 2n_2-2,\ \ldots,\ m_h \leqq 2n_h-2$$

und

$$m \leqq m_1+m_2+\ldots+m_h.$$

Aus der vorigen Gleichung und aus diesen Ungleichungen folgt die Ungleichung

$$m \leqq m_1+m_2+\ldots+m_h \leqq 2n-4+2h.$$

Eine irreduzible Kurve vom Maximalklassenindex hat höchstens einen Zug vom Geschlechte Null. Hat die aus h Zügen bestehende Kurve C vom Maximalklassenindex einen Zug vom Geschlechte Null, so ist sie vom Geschlechte $h-1$, im anderen Falle ist sie vom Geschlechte h.[9])

Die vorige Ungleichung läßt sich also in der Form

$$m \leqq 2n-2+2p \quad \text{bzw.} \quad m \leqq 2n-4+2p$$

[7]) B, S. 165—166, die Deformationen α und β.
[8]) A, S. 66.
[9]) C, S. 180—182.

ausdrücken, je nachdem die Kurve C einen bzw. keinen Zug vom Geschlechte Null hat.

Nimmt man in der Ebene h im Endlichen liegende einzügige Kurven n_1-, n_2-, ..., n_h-ter Klasse, $(2n_1-2)$-, $(2n_2-2)$-, ..., $(2n_h-2)$-ter Ordnung vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte Eins an, die von derselben Geraden e der Ebene in $2n_1-2, 2n_2-2, \ldots, 2n_h-2$ Punkten getroffen werden und von denen keine der h Kurven eine andere schneidet oder umschließt, so bilden die h Kurven eine irreduzible Kurve vom Maximalklassenindex. Das Geschlecht p, die Klasse n bzw. die Ordnung m dieser Kurve ist

$$p = h, \quad n = n_1 + n_2 + \ldots + n_h - 2p + 2 \quad \text{bzw.} \quad m = 2n - 4 + 2p.$$

Ersetzt man die h-te Kurve n_h-ter Klasse vom Geschlechte Eins durch eine Kurve derselben Klasse und derselben Ordnung vom Maximalklassenindex aber vom Geschlechte Null, von der die ersten $h-1$ Kurven umschlossen werden, und die Gerade e in $2n_h-2$ Punkten getroffen wird, so erhält man eine irreduzible Kurve vom Maximalklassenindex. Für das Geschlecht p, die Klasse n bzw. die Ordnung m dieser Kurve besteht die Gleichung

$$p = h-1, \quad n = n_1 + n_2 + \ldots + n_h - 2p \quad \text{bzw.} \quad m = 2n - 2 + 2p.$$

Damit ist der Satz bewiesen:

Satz VII. *Die Maximalordnung einer irreduziblen Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex vom Geschlechte p, deren Züge alle vom Index Null sind, ist $2n-2+2p$ bzw. $2n-4+2p$, je nachdem die Kurve einen bzw. keinen Zug vom Geschlechte Null hat.*

Der Index einer Kurve vom Maximalklassenindex, deren alle Züge vom Index Null sind, kann von Null abweichen.

Zerfällt die Kurve C n-ter Klasse m-ter Ordnung vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte p in k irreduzible Kurven n_1-, n_2-, ..., n_k-ter Klasse, m_1-, m_2-, ..., m_k-ter Ordnung vom Geschlechte $p_1, p_2, \ldots, p_k$, und sind die Züge der Kurve C alle vom Index Null, so bestehen die Gleichungen bzw. Ungleichungen

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k, \qquad p = p_1 + p_2 + \ldots + p_k - k + 1,$$

$$m \leqq m_1 + m_2 + \ldots + m_k,$$

$$m_1 \leqq 2n_1 - 2 + 2p_1, \; m_2 \leqq 2n_2 - 2 + 2p_2, \; \ldots, \; m_k \leqq 2n_k - 2 + 2p_k.$$

Daraus folgt die Ungleichung

$$m \leqq 2n - 2 + 2p.$$

Die in k irreduzible Kurven zerfallende Kurve C vom Maximalklassenindex hat entweder k oder $k-1$ Züge vom Geschlechte Null. Hat die

k-te irreduzible Kurve n_k-ter Klasse keinen Zug vom Geschlechte Null, so besteht auch die Ungleichung

$$m \leqq 2n - 4 + 2p,$$

weil dann $m_k \leqq 2n_k - 4 + 2p_k$ ist.

Hat man die irreduziblen Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_k$ n_1-, n_2-, $\ldots$. n_k-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte $p_1, p_2, \ldots, p_k$, deren Ordnungen $2n_1 - 2 + 2p_1, 2n_2 - 2 + 2p_2, \ldots, 2n_k - 2 + 2p_k$ sind, so konstruiert, wie es im Vorigen gesagt wurde, und versetzt man die k Kurven in die Ebene, so daß keiner der äußeren k Züge vom Geschlechte Null einen anderen schneidet oder umschließt und daß die Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_k$ von derselben Geraden e der Ebene in der Maximalanzahl der Punkte geschnitten werden, so stellen die Kurven $C_1, C_2, \ldots, C_k$ eine in k irreduzible Kurven zerfallende Kurve vom Maximalklassenindex dar. Das Geschlecht, die Klasse bzw. die Ordnung dieser Kurve ist

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_k - k + 1, \qquad n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k,$$
$$m = 2n - 2 + 2p.$$

Man erhält eine reduzible Kurve vom Maximalklassenindex mit denselben charakteristischen Zahlen (Klasse, Ordnung, Klassenindex, Index, Geschlecht, die Anzahl der irreduziblen Kurven, in welche die Kurve zerfällt) auch dann, wenn man z. B. die Kurve C_2 auf geeignete Weise verkleinert in ein innerhalb des äußeren Zuges (vom Geschlechte Null) der Kurve C_1 liegendes Gebiet, aus dessen Punkten die konvexe Seite der Kurve C_1 erreicht werden kann, so versetzt, daß auch die neue Kurve C_2 von der Geraden e in $2n_2 - 2 + 2p_2$ Punkten getroffen wird[10]).

Man kann dieses Verfahren auf verschiedene Arten fortsetzen. So kann man auch eine Kurve mit denselben charakteristischen Zahlen erhalten, die einen äußeren Zug vom Geschlechte Null hat, der die übrigen Züge umschließt.

Läßt man diesen äußeren Zug vom Geschlechte Null aus, so bilden die übrigbleibenden Züge der Kurve eine Kurve C' vom Maximalklassenindex, die in k irreduzible Kurven mit Zügen vom Index Null zerfällt, wenn die Kurve C_1 außerhalb des ausgelassenen Zuges noch wenigstens einen Zug hatte. Hat die Kurve C' die Klasse n', die Ordnung m' und das Geschlecht p', so ist

$$m' = 2n' - 4 + 2p'.$$

Es gilt also der

Satz VIII. *Die Maximalordnung der irreduziblen oder reduziblen Kurven n-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte p,*

[10]) A, S. 41–43.

deren Züge vom Index Null sind, ist $2n-2+2p$. *Hat eine in* k *irreduzible Kurven zerfallende Kurve* n*-ter Klasse vom Maximalklassenindex, die das Geschlecht* p *und nur Züge vom Index Null hat, nur* $k-1$ *Züge vom Geschlecht Null, so ist sie höchstens von der Ordnung* $2n-4+2p$.

Das Maximalgeschlecht einer Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex ist $n-2$.[11]) Daraus folgt der

Satz IX. *Die Maximalordnung einer Kurve* n*-ter Klasse vom Maximalklassenindex, deren Züge vom Index Null sind, ist* $4n-6$.

5. Die Ordnung der Kurven vom Maximalklassenindex mit einem Zuge vom Index Zwei, deren übrige Züge vom Index Null sind.

Ist C eine einzügige Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Index Zwei, so ist die Kurve paar. Ist g_0 eine Gerade der Ebene, von der die Kurve C nur in zwei Punkten geschnitten wird, so gibt es auf der Geraden g_0 einen Punkt P, von dem $\mu = n-2$ Tangenten der Kurve C ausgehen und nicht mehr. Läßt man von g_0 ausgehend eine Gerade g um den Punkt P den Winkel π schreiben, und benützt man die Bezeichnungen des dritten Paragraphen, so bestehen die Gleichungen

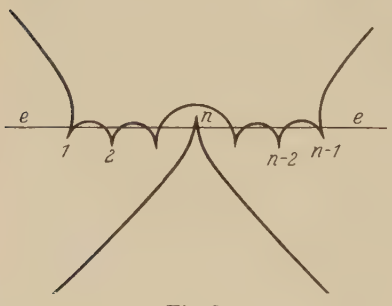


Fig. 3.

$$x-y=0,$$

$$x+y=r+\mu=r+n-2=2n-4+2p$$

und die Ungleichung

$$m \leqq 2+2x=2+r+\mu=2n-2+2p,$$

wo r bzw. p die Anzahl der Spitzen bzw. das Geschlecht der Kurve C ist.

Hat also die Kurve C das Geschlecht Eins, so ist $m \leqq 2n$.

Die Fig. 3 stellt eine einzügige Kurve 7-ter Klasse 14-ter Ordnung vom Maximalklassenindex, die das Geschlecht Eins und den Index Zwei hat, dar. Diese Kurve wird von der Geraden e in 14, von der unendlichfernen Geraden in 2 Punkten geschnitten. Man kann auf Grund dieser Figur für jede ganze Zahl $n \geqq 3$ einzügige Kurven n-ter Klasse vom Maximalklassenindex darstellen, deren Ordnung bzw. Index $2n$ bzw. 2 ist.

Es gilt also der

Satz IX. *Für jede ganze Zahl* $n \geqq 3$ *gibt es einzügige Kurven* n*-ter Klasse* $2n$*-ter Ordnung vom Maximalklassenindex. Das Geschlecht dieser Kurven ist immer Eins, der Index ist wenigstens Zwei.*

[11]) A, S. 52. C, S. 180–183.

Besteht eine irreduzible Kurve C n-ter Klasse m-ter Ordnung vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte p, aus dem Zuge Z_1 vom Index Zwei und vom Geschlechte p_1 und aus den $h-1$ Zügen $Z_2, Z_3, \ldots, Z_h$ vom Index Null, und sind $n_1, n_2, \ldots, n_h$ bzw. $m_1, m_2, \ldots, m_h$ die Klassen bzw. die Ordnungen der h Züge, so bestehen die Relationen

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_h - 2h + 2, \qquad m \leqq m_1 + m_2 + \ldots + m_h,$$
$$m_1 \leqq 2n_1 - 2 + 2p_1, \; m_2 \leqq 2n_2 - 2, \; \ldots, \; m_h \leqq 2n_h - 2.$$

Aus diesen Relationen folgt die Ungleichung

$$m \leqq 2n - 4 + 2p_1 + 2h.$$

Ist der Zug Z_1 vom Geschlechte Null, so sind die übrigen $h-1$ Züge der Kurve C vom Geschlechte Eins. In diesem Falle ist $p = h - 1$. Ist der Zug Z vom Geschlechte Eins, so sind auch die übrigen $h-1$ Züge vom Geschlechte Eins, wie wir beweisen werden.

Hätte nämlich der Zug Z_2 das Geschlecht Null, so können wir annehmen, daß er im Endlichen liegt, weil er vom Index Null ist. Die Punkte der Ebene, aus denen die konkave Seite des Zuges Z_2 erreicht werden kann, bilden das einfach zusammenhängende Gebiet T innerhalb des Zuges Z_2.

Die aus den Zügen Z_1 und Z_2 bestehende Kurve C' ist vom Maximalklassenindex und irreduzibel[12]). Die Punkte der Ebene, aus denen die konkave Seite der Kurve C' erreicht werden kann, bilden also ein einziges Gebiet. Daraus folgt, daß der Zug Z_1 vom Index Zwei in dem endlichen Gebiete T liegen muß.

Aus dieser Unmöglichkeit folgt, daß die Züge $Z_2, Z_3, \ldots, Z_h$ vom Geschlechte Eins sind und die Kurve C' vom Geschlechte $p = h$ ist, wenn $p_1 = 1$ ist.

In beiden Fällen ist also

$$p_1 + h = p + 1 \quad \text{und} \quad m \leqq 2n - 2 + 2p.$$

Zerfällt eine Kurve C n-ter Klasse, m-ter Ordnung vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte p, die aus einem Zuge vom Index Zwei und aus Zügen vom Index Null besteht, so beweist man die Ungleichung

$$m \leqq 2n - 2 + 2p$$

ebenso wie im vorigen Paragraphen.

Man kann mehrzügige Kurven C von der Maximalordnung $m = 2n - 2 + 2p$, die einen Zug vom Index Zwei haben, leicht darstellen.

Nimmt man in der Ebene eine einzügige Kurve Z_1 n_1-ter Klasse $2n_1$-ter Ordnung vom Index Zwei an und legt man in das Gebiet der

[12]) A, S. 68.

Ebene, aus dessen Punkten $n_1 - 2$ Tangenten an die Kurve Z_1 gehen, die im Endlichen liegenden Kurven $Z_2, Z_3, \ldots, Z_h$ n_2-, n_3-, $\ldots$, n_h-ter Klasse, $(2n_1 - 2)$-, $(2n_2 - 2)$-, $\ldots$, $(2n_h - 2)$-ter Ordnung vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte Eins, so daß keine der Kurven $Z_2, Z_3, \ldots, Z_h$ eine andere schneidet oder umschließt und so daß die Kurven $Z_1, Z_2, \ldots, Z_h$ von einer Geraden e in der Maximalanzahl der Punkte getroffen werden, so bilden die h Züge $Z_1, Z_2, \ldots, Z_h$ eine irreduzible Kurve vom Maximalindex und vom Geschlechte $p = h$. Die Klasse bzw. die Ordnung dieser Kurve ist

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + h_h - 2p + 2 \quad \text{bzw.} \quad m = 2n - 2 + 2p.$$

Diese Kurve hat keinen Zug vom Geschlechte Null.

Durch diese Kurve und durch $k - 1$ im Endlichen liegende Kurven vom Maximalklassenindex und von der Maximalordnung kann man leicht in k irreduzible Kurven zerfallende Kurven vom Maximalklassenindex darstellen, welche die Klasse n', die Ordnung $m' = 2n' - 2 + 2p'$, das Geschlecht p' und nur $k - 1$ Züge vom Geschlechte Null haben.

Wir haben also den folgenden Satz bewiesen:

Satz X. *Die Maximalordnung der Kurven n-ter Ordnung vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte p, deren Züge — einen Zug vom Index Zwei ausgenommen — vom Index Null sind, ist $2n - 2 + 2p$.*

6. Die Ordnung der unpaaren Kurven vom Maximalklassenindex.

Eine unpaare Kurve C vom Maximalklassenindex hat nur einen unpaaren Zug, weil sie eine Wendetangente hat. Ist Z dieser unpaare Zug, so ist er ein einufriger Querschnitt der Ebene, von dem die projektive Ebene in ein einfach zusammenhängendes Gebiet verwandelt wird. Dieses Gebiet wird von der Wendetangente q des Zuges Z in zwei einfach zusammenhängende Gebiete G und T geteilt. Aus den Punkten des Gebietes G bzw. T kann die konvexe bzw. die konkave Seite der Kurve Z erreicht werden, ohne die Wendetangente q überschreiten zu müssen. Daraus folgt, daß der Zug Z vom Geschlechte Null ist.

Die Wendetangente q hat je ein Ufer im Gebiete G und T. Der Zug Z und die anderen Züge der Kurve C vom Maximalklassenindex können die Wendetangente außerhalb des Wendepunktes berühren, aber nur an das dem Gebiete G zugehörige Ufer der Wendetangente. Daraus folgt, daß es im Gebiete T in der Nähe der Wendetangente eine Gerade g_0 gibt, von der die Kurve C außerhalb des Wendepunktes nicht getroffen wird.

Daraus folgt der

Satz XI. *Die unpaaren Kurven vom Maximalklassenindex sind vom Index Eins.*

Ist P ein Punkt der Geraden g_0, von der die Kurve nur in einem Punkte, in dem Wendepunkte getroffen wird, so gehen $\mu = n - 2$ Tangenten aus P an die Kurve C n-ter Klasse, weil man aus P die konkave Seite der Kurve erreichen kann, ohne die Wendetangente überschreiten zu müssen.

Läßt man von g_0 ausgehend eine Gerade g um den Punkt P den Winkel π schreiben und bezeichnet man mit x bzw. y die Anzahl der Zunahmen bzw. Abnahmen der gemeinsamen Punkte der Geraden g und der Kurve C während der Drehung der Geraden g, so bestehen die Gleichungen

$$x - y = 0, \quad x + y = r + \mu = n - 2 + 2p + n - 2 = 2n - 4 + 2p,$$

wo r die Anzahl der Spitzen, p das Geschlecht der Kurve C ist.

Für die Ordnung m der Kurve C folgt also die Ungleichung

$$m \leqq 1 + 2x = 2n - 3 + 2p = 2n - 2 + 2p - w.$$

Hat man eine unpaare einzügige Kurve vom Maximalklassenindex, z. B. eine Kurve dritter Ordnung und dritter Klasse, so kann man durch im Endlichen liegende Kurven vom Maximalklassenindex und von der Maximalordnung auf verschiedene Arten mehrzügige irreduzible oder reduzible Kurven vom Maximalklassenindex erzeugen, welche die Maximalordnung $2n' - 2 + 2p' - w$ haben, wo n' bzw. p' die Klasse bzw. das Geschlecht der Kurve ist. Dies kann man auf Grund der vorigen leicht einsehen.

Es gilt also der

Satz XII. *Die Maximalordnung der unpaaren Kurven n-ter Klasse vom Maximalklassenindex und vom Geschlechte p ist*

$$2n - 2 + 2p - w = 2n - 3 + 2p.$$

Wir beweisen noch den

Satz XIII. *Die Maximalordnung der unpaaren Kurven n-ter Klasse vom Maximalklassenindex ist* $4n - 9$.

Der Klassenindex des unpaaren Zuges Z der unpaaren Kurve C n-ter Klasse vom Maximalklassenindex weicht nämlich von Null ab. Ein Zug der Kurve C, der vom Klassenindex Null ist, ist ein Oval und hat das Geschlecht Null. Die Kurve C hat höchstens $n - 2$ von Ovalen abweichende Züge, weil ihr Klassenindex $n - 2$ wenigstens mit der Summe der Klassenindizes ihrer Züge gleich ist. Daraus folgt, daß die Kurve höchstens $n - 3$ Züge vom Geschlechte Eins haben kann, weil der Zug Z vom Geschlechte Null ist. Das Geschlecht p der Kurve C ist also höchstens $n - 3$.[13]) Für die Ordnung m der unpaaren Kurve C folgt also die Ungleichung

$$m \leqq 2n - 2 + 2p - w \leqq 4n - 9.$$

[13]) C, S. 180–183.

Nimmt man in der Ebene eine Kurve Z dritter Klasse und dritter Ordnung und in dem Gebiete, aus dessen Punkten nur eine Tangente an die Kurve Z geht, $n-3$ im Endlichen liegende Kurven $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-3}$ dritter Klasse (vierter Ordnung) an, von denen keine eine andere schneidet oder umschließt und von denen jede von einer die Kurve Z in drei Punkten schneidenden Geraden e in vier Punkten getroffen wird, so stellen die $n-2$ Kurven $Z, Z_1, \ldots, Z_{n-3}$ dritter Klasse eine irreduzible unpaare Kurve n-ter Klasse vom Maximalklassenindex dar, die von der Ordnung $4n-9$ und vom Geschlechte $n-3$ ist.

Damit ist der Satz XIII vollständig bewiesen.

Aus den vorigen folgt der in der Einleitung ausgesprochene Satz ohne weiteres. Aus den Gleichungen

$$r = n - 2 + 2p \quad \text{und} \quad p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - t - w$$

folgen nämlich die Gleichungen

$$2n - 2 + 2p = n + r - w = n(n-1) - 2t - 3w.$$

(Eingegangen am 6. März 1931.)

Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen.

Von

Werner Rogosinski in Königsberg.

Die Klasse $\mathfrak{P}$ der im Einheitskreise $0 \leqq r < 1$ konvergenten und daselbst positiven harmonischen Entwicklungen

$$u(r, \varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi)\, r^n \tag{1}$$

spielt bekanntlich in vielen Fragen der ebenen Potentialtheorie und Funktionentheorie eine hervorragende Rolle. Im Jahre 1907 hat Herr Carathéodory[1]) den genauen Variabilitätsbereich der Koeffizienten α_n, β_n einer solchen Reihe (1) und damit die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ihre Zugehörigkeit zu $\mathfrak{P}$ bestimmt. An diese grundlegende Arbeit hat sich eine zahlreiche Literatur angeschlossen, so daß man heute diese Klasse ziemlich abschließend beherrscht.

Eine ähnliche Klasse $\mathfrak{S}$, nämlich die der im Einheitskreise $0 \leqq r < 1$ konvergenten und in seiner oberen Hälfte $0 < \varphi < \pi$ positiven harmonischen Sinusentwicklungen

$$v(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\varphi\, r^n; \qquad a_1 = 1, \tag{2}$$

macht den Hauptgegenstand der vorliegenden Untersuchung aus. Diese Klasse scheint bisher noch nicht behandelt worden zu sein, obschon auch sie, wie das Ergebnis dieser Arbeit zeigen dürfte, von kaum geringerer Allgemeinbedeutung als die Klasse $\mathfrak{P}$ ist. Im übrigen läßt sie sich durch

[1]) C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen, Math. Annalen **64** (1907), S. 95—115; Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Palermo Rend. **32** (1911), S. 193—217. Im übrigen vgl. I, § 1 der vorliegenden Arbeit, wo der Carathéodorysche Hauptsatz formuliert ist.

eine einfache Überlegung auf diese, und zwar auf die Kosinusreihen ($\beta_n = 0$) aus $\mathfrak{P}$ zurückführen. Diese Zurückführung ist aber nicht trivial und nimmt der Klasse $\mathfrak{S}$ nicht das ihr gebührende selbständige Interesse; andererseits gestattet sie, auch hier analoge im gewissen Sinne abschließende Aussagen zu gewinnen.

Faßt man $u(r, \varphi)$ als Realteil einer in $|z| < 1$ konvergenten Potenzreihe

$$\Phi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n; \quad A_n = \alpha_n + i\beta_n; \quad z = re^{i\varphi} \tag{3}$$

auf, so erhält man die Klasse $\mathfrak{R}$ derjenigen $\Phi(z)$, die in $|z| < 1$ einen positiven Realteil besitzen.

Analog entspricht unserer Klasse $\mathfrak{S}$ die Klasse $\mathfrak{J}$ der in $|z| < 1$ konvergenten Potenzreihen

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n; \quad a_1 = 1; \quad z = re^{i\varphi} \tag{4}$$

mit *reellen* Koeffizienten a_n, die in der oberen Hälfte des Einheitskreises $|z| < 1$, also für $0 < \varphi < \pi$, einen positiven Imaginärteil besitzen. Diese Klasse $\mathfrak{J}$ läßt sich aber — und das zeigt ihre Allgemeinbedeutung — noch anders charakterisieren. *Es sind nämlich genau diejenigen $f(z)$, die in $|z| < 1$ für reelle z und nur für diese reellwertig sind.* Wir wollen solche Potenzreihen im folgenden als in $|z| < 1$ *typisch-reell* [2]) bezeichnen. Zu ihnen gehören als besonders interessante Unterklasse $\mathfrak{J}_s$ die in $|z| < 1$ schlichten Reihen (4) mit *reellen* Koeffizienten (Funktionen $s(z)$, *reelle schlichte Potenzreihen*).

Wir werden, was bequemer ist, statt $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{S}$ immer die äquivalenten Potenzreihenklassen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{J}$ behandeln. Die schon erwähnte Beziehung zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{J}$, welche die Übertragung der Carathéodoryschen Theorie auf die typisch-reellen Potenzreihen gestattet, ist nun die folgende:

Es bezeichne

$$\varphi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{5}$$

eine Potenzreihe aus $\mathfrak{R}$ mit *reellen* Koeffizienten α_n (Unterklasse $\mathfrak{R}_r$). *Dann entspricht, wie wir zeigen werden, durch die Relation*

$$\varphi(z) = f(z)\frac{1 - z^2}{z} \tag{6}$$

jedem $f(z)$ aus $\mathfrak{J}$ ein $\varphi(z)$ aus $\mathfrak{R}_r$ und umgekehrt.

[2]) In einem Vortrag auf der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Königsberg (1930) (vgl. Jahresber. d. Dtsch. Math.-Ver. **40** (1931), S. 33—35), wo ich über die Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit bereits berichtete, habe ich diese Potenzreihen *totalreell* genannt. Die Bezeichnung typisch-reell dürfte treffender sein.

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist ein genaues Gegenstück zu dem Carathéodoryschen Hauptsatze und aus ihm vermittels (6) leicht zu gewinnen, nämlich die folgende Bestimmung des Variabilitätsbereiches der Koeffizienten a_n der Reihen (4) aus $\mathfrak{F}$:

Es sei $n \geqq 2$ ganz. Wir nennen im $(n-1)$-dimensionalen Raume R_{n-1} den Punkt P_n mit den Koordinaten $a_2, a_3, \ldots, a_n$ den n-ten Repräsentanten der Funktion $f(z)$.

P_n liegt dann in der (abgeschlossenen) konvexen Hülle K_n der $(n-1)$-dimensionalen Kurve

$$(C_n) \qquad \frac{\sin 2\vartheta}{\sin \vartheta}, \frac{\sin 3\vartheta}{\sin \vartheta}, \ldots, \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}; \qquad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi,$$

und umgekehrt ist jeder Punkt von K_n n-ter Repräsentant einer Potenzreihe aus $\mathfrak{F}$.

Die Punkte von K_n besitzen die eineindeutige Parameterdarstellung[3])

$$(7) \quad a_k = \sum_{j=1}^{\mathfrak{F}} \mu_j \frac{\sin k\vartheta_j}{\sin \vartheta_j}; \quad 2 \leqq k \leqq n; \quad 0 \leqq \mathfrak{F} \leqq p_n; \quad \mu_j > 0; \quad \sum_{j=1}^{\mathfrak{F}} \mu_j \leqq 1; \quad 0 \leqq \vartheta_j \leqq \pi,$$

wo

$$(8) \qquad p_n = \left[\frac{n-1}{2}\right] \text{ bzw. } \left[\frac{n}{2}\right] \text{ bzw. } \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

bedeutet, je nachdem ob 0 und π unter den ϑ_j nicht vorkommen, bzw. 0 oder π (aber nur eins von ihnen) unter den ϑ_j vorkommen, bzw. 0 und π unter den ϑ_j vorkommen.

Die Oberfläche O_n von K_n ist dabei durch $\sum_{j=1}^{\mathfrak{F}} \mu_j = 1$ charakterisiert, und ihre Punkte entsprechen eineindeutig den n-ten Repräsentanten der rationalen Funktionen

$$(9) \qquad R(z) = \sum_{j=1}^{\mathfrak{F}} \mu_j \frac{z}{1 - 2z\cos\vartheta_j + z^2}; \qquad \sum_{j=1}^{\mathfrak{F}} \mu_j = 1$$

und nur von diesen.

Weiter gilt:

Eine Potenzreihe (4) ist dann und nur dann in $|z| < 1$ typisch-reell, wenn alle ihre n-ten Repräsentanten in den entsprechenden K_n liegen.

Endlich läßt sich auch die bekannte algebraische Charakterisierung des Variabilitätsbereiches der Koeffizienten, die Herr Toeplitz[4]) für die Klasse $\mathfrak{R}$ gegeben hat, zufolge (6) unmittelbar auf $\mathfrak{F}$ übertragen:

[3]) Leere Summen ($\mathfrak{F} = 0$!) bedeuten stets die 0.

[4]) O. Toeplitz, Über die Fouriersche Entwicklung positiver Funktionen. Palermo Rend. **32** (1911), S. 191—192.

Die Punkte von K_n sind dadurch gekennzeichnet, daß für sie die $n-1$ Determinanten

$$(10)\qquad D_k = \begin{vmatrix} 2 & a_2 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_{n-2} \\ a_2 & 2 & a_2 & \dots & a_{n-1} - a_{n-3} \\ a_3 - a_1 & a_2 & 2 & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_n - a_{n-2} & a_{n-1} - a_{n-3} & \cdot & \dots & 2 \end{vmatrix};$$

$$2 \leqq k \leqq n; \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

entweder alle positiv sind oder von einer gewissen Stelle an, bis zu der sie positiv sind, sämtlich verschwinden. Im letzteren Falle erhält man die Oberfläche O_n.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

In einem ersten Abschnitt wird die Carathéodorysche Klasse $\mathfrak{R}$ besprochen. Das ist schon in Hinblick auf die wegen (6) wichtige Unterklasse $\mathfrak{R}_r$ nötig.

Im § 1 dieses Abschnitts werden einige, zum Teil wohl neue allgemeine Bemerkungen über diese Klasse gemacht. Unter anderm wird

$$(11)\qquad L(r) = \int_0^{2\pi} r \,|\, \Phi'(r e^{i\varphi}) \,|\, d\varphi \leqq \frac{4r\pi}{1-r^2} \qquad (0 < r < 1)$$

bewiesen. Dabei ist $L(r)$ die Bogenlänge des Bildes des Kreises $|z| = r$ bei der Abbildung durch ein $\Phi(z)$. Das Gleichheitszeichen wird nur von den Funktionen $\frac{1+ze^{i\vartheta}}{1-ze^{i\vartheta}}$ erreicht. Analoges gilt für die radialen Bogenlängen.

Der § 2 formuliert den Carathéodoryschen Variabilitätsbereich für die A_n aus (3) und leitet daraus alsbald den entsprechenden Bereich für die Koeffizienten α_n einer Funktion $\varphi(z)$ der Unterklasse $\mathfrak{R}_r$ her.

Der § 3 bringt für die Klasse $\mathfrak{R}$ eine für die Anwendungen besonders nützliche Formulierung des Carathéodoryschen Satzes (Projektion ins Zweidimensionale), welche sich auf lineare Koeffizientenbildungen

$$(12)\qquad \Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathsf{A}_n \qquad (\lambda_n \text{ beliebig komplex})$$

bezieht. Aus ihr lassen sich die meisten Resultate über die Klasse $\mathfrak{R}$ unmittelbar ablesen, darunter auch einige wohl neue.

Im § 4 werden analog die linearen Koeffizientenbildungen

$$(13)\qquad \lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n \qquad (\lambda_n \text{ beliebig komplex})$$

der Unterklasse $\mathfrak{R}_r$ behandelt. Die interessanteste Anwendung ist hier die folgende Verschärfung der bekannten „Carathéodoryschen Ungleichungen“ [5]), wenn es sich speziell um Funktionen $\varphi(z)$ aus $\mathfrak{R}_r$ handelt:

Bei festem z aus $|z|<1$ liegt $\varphi(z)$ in demjenigen Kreissegment des Kreises durch 0, $\frac{1-z}{1+z}$ und $\frac{1+z}{1-z}$, welches zu dem durch die beiden letzteren Punkte bestimmten, 0 nicht enthaltenden Bogen gehört. Jeder solche Wert wird auch wirklich für ein passendes $\varphi(z)$ angenommen (Fig. 1).

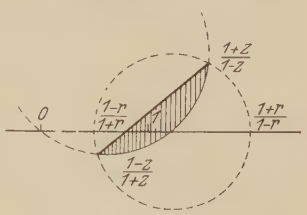


Fig. 1.

Dieser Satz ergibt sodann eine bemerkenswerte Verschärfung des „Schwarzschen Lemmas“ für Potenzreihen mit reellen Koeffizienten.

Der zweite Abschnitt gilt den typisch-reellen Potenzreihen.

Im § 1 dieses Abschnitts werden zunächst wieder einige allgemeine Eigenschaften der Klasse $\mathfrak{T}$ diskutiert; dabei wird insbesondere die durch (6) gegebene Beziehung zur Klasse $\mathfrak{R}_r$ bewiesen. Bemerkenswert ist ferner als Gegenstück zu (11) die Ungleichung

$$L(r) \leqq L^*(r) \qquad (0<r<1). \tag{14}$$

Dabei ist $L(r)$ wieder die Bogenlänge des Bildes des Kreises $|z|=r$ bei der Abbildung durch ein typisch-reelles $f(z)$, $L^*(r)$ desgleichen bei den speziellen Funktionen $\frac{z}{(1\pm z)^2}$.

Der § 2 bringt den Beweis für den eingangs formulierten Variabilitätsbereich der Koeffizienten a_n.

Im § 3 handelt es sich um die linearen Koeffizientenbildungen

$$L=\sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n a_n \qquad (\lambda_n \text{ beliebig komplex}), \tag{15}$$

die man durch Projektion des Variabilitätsbereiches ins Zweidimensionale wieder allgemein beherrscht. Man erhält so eine Fülle interessanter Einzelresultate. Hier seien nur die folgenden genannt:

1. Es ist

$$\begin{array}{lll} -n & & \text{gerade} \\ & \leqq a_n \leqq n; \quad n & \\ -n<k_n=\dfrac{\sin n\vartheta_n}{\sin\vartheta_n} & & \text{ungerade} \end{array}, \tag{16}$$

[5]) Siehe am besten Abschnitt I, § 3, 3 dieser Arbeit.

wo ϑ_n die in $\left(\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{2n}\right)$ gelegene Lösung von $\operatorname{tg} n\vartheta = n \operatorname{tg}\vartheta$ bezeichnet[6]). Dies zeigen natürlich auch ohne den allgemeinen Satz die aus (2) folgenden Fourierformeln

$$a_n = \frac{2}{\pi r^n} \int_0^{\pi} v(r, \varphi) \sin\varphi \left(\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}\right) d\varphi . \tag{17}$$

Man beachte, daß also die bekannte Bieberbachsche Vermutung, nämlich $|a_n| \leqq n$, über die Koeffizienten einer (allgemeinen) schlichten Potenzreihe (4) jedenfalls für die reellen schlichten Potenzreihen richtig ist[7]).

2. Es ist (wieder auch aus (17) sofort ersichtlich) für $n \geqq 0$

$$a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1} \geqq 0. \tag{18}$$

Hiervon kann man eine wichtige Anwendung machen. Es ist doch in $|z| < 1$

$$F_\vartheta(z) = \frac{z}{1 - 2z\cos\vartheta + z^2} = \frac{1}{\left(z + \frac{1}{z}\right) - 2\cos\vartheta} \tag{19}$$

reell-schlicht, also

$$\sqrt{F_\vartheta(z^2)} = \frac{z}{\sqrt{1 - 2z^2\cos\vartheta + z^4}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\vartheta)\, z^{2n+1} \tag{20}$$

desgleichen. (18) ergibt jetzt die in der Theorie der Laplaceschen Reihen fundamentale Fejérsche Relation[8])

$$P_0(\cos\vartheta) + P_1(\cos\vartheta) + \ldots + P_n(\cos\vartheta) \geqq 0. \tag{21}$$

Dies dürfte mit der einfachste Beweis für sie sein.

3. *Sämtliche Abschnitte*

$$s_m(z) = \sum_{n=1}^{m} a_n z^n \tag{22}$$

einer in $|z| < 1$ *typisch-reellen Potenzreihe sind in* $|z| < \frac{1}{4}$ *typisch-reell.* $\frac{1}{4}$ *ist dabei die beste Konstante.*

---

[6]) Es ist $k_n \sim n \cos\vartheta^* = -n \cdot 0{,}217\ldots$, wo ϑ^* die in $(\pi, 2\pi)$ gelegene Lösung von $\operatorname{tg}\vartheta = \vartheta$ bedeutet. Vgl. I. Schur, Über die Koeffizientensumme einer Potenzreihe mit positivem reellen Teil, Arch. d. Math. u. Phys. 27 (1918), S. 126–129, Formel (4).

[7]) Diesen interessanten Spezialfall der Bieberbachschen Vermutung haben inzwischen auch Herr Dieudonné (Comptes rendus **192** (1931), S. 79–81) und Herr v. Egerváry (briefl. Mitteilung) unabhängig von meinem Königsberger Vortrag auf ähnliche Weise bewiesen.

[8]) L. Fejér, Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen oder Legendreschen Funktionen fortschreiten, Acta Litt. ac Scient. Szeged (1925). Hier steht der einfachste Fejérsche Beweis für (21); er beruht darauf, daß $\frac{1-z}{\sqrt{1 - 2z\cos\vartheta + z^2}}$ zu $\mathfrak{R}$ gehört (vgl. (25) vorliegender Arbeit!). Erster Beweis 1908.

Man beachte, daß Herr Szegö[9]) bewiesen hat, daß sämtliche Abschnitte einer allgemeinen in $|z|<1$ schlichten Potenzreihe (4) in $|z|<\frac{1}{4}$ schlicht sind, und daß auch hierbei $\frac{1}{4}$ die wahre Konstante ist.

Der Satz ist das Gegenstück zu der bekannten Tatsache, daß sämtliche Abschnitte einer Reihe (3) aus $\Re$ in $|z|<\frac{1}{2}$ positiven Realteil haben und daß hierbei $\frac{1}{2}$ die beste Konstante ist[10]).

4. Den Carathéodoryschen Ungleichungen entspricht hier der folgende Satz:

Bei festem z aus $|z|<1$ liegt $f(z)$ in demjenigen Kreissegment des Kreises durch 0, $\frac{z}{(1+z)^2}$ und $\frac{z}{(1-z)^2}$, welches zu dem durch die beiden letzteren Punkte bestimmten, 0 nicht enthaltenden Bogen gehört. Jeder solche Wert wird auch wirklich für ein passendes $f(z)$ angenommen.

Für die ungeraden $f_u(z)$ aus $\Im$ ergibt sich genauer:

Bei festem z aus $|z|<1$ liegt $f_u(z)$ in demjenigen Kreissegment des Kreises durch 0, $\frac{z}{1+z^2}$ und $\frac{z\cdot(1+z^2)}{(1-z^2)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{(1+z)^2}+\frac{z}{(1-z)^2}\right)$, welches zu dem durch die beiden letzteren Punkte bestimmten, 0 nicht enthaltenden Bogen gehört. Auch dies ist der wahre Wertebereich für $f_u(z)$ (Fig. 2).

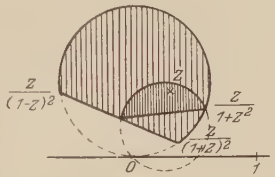


Fig. 2.

Der letzte § 4 enthält einige Bemerkungen über die interessante Unterklasse $\Im_s$ der reellen schlichten Potenzreihen $s(z)$. Hier lassen sich wenigstens für die ungeraden $s_u(z)$ einige der allgemeinen Aussagen über die $f_u(z)$ verschärfen, so z. B. der eben genannte Wertebereich. Allerdings erhält man keine Bestaussagen.

Es werden ferner die Bestabschätzungen

$$-1\leqq a_3\leqq 1;\qquad a_5\geqq -\frac{1}{2} \tag{23}$$

für diese $s_u(z)$ bewiesen. *Allgemein ergibt sich die Abschätzung*

$$|a_n|\leqq 2, \tag{24}$$

die jedoch nicht scharf ist. Bekanntlich ist für die allgemeinen ungeraden schlichten Potenzreihen die Beschränktheit der Koeffizienten noch ungewiß.

---

[9]) G. Szegö, Zur Theorie der schlichten Abbildungen, Math. Annalen **100** (1928), S. 188–211.

[10]) W. Rogosinski, Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten, Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 260–276, Satz II, 5; vgl. auch L. Fejér, l. c. S. 80.

I. Abschnitt.

Über Potenzreihen mit positivem Realteil.

§ 1.

Einige allgemeine Bemerkungen.

1. Es handelt sich um die Klasse $\mathfrak{R}$ der in $|z|<1$ konvergenten Potenzreihen (3), die daselbst einen positiven Realteil haben.

Mit $\Phi(z)$ gehören ersichtlich auch $\Phi(z\,e^{i\vartheta})$ (ϑ reell), $\Phi(z^n)$ (n ganz positiv), $\frac{1}{\Phi(z)}$ und $\frac{1}{z}\int_0^z \Phi(\zeta)\,d\zeta$ zu $\mathfrak{R}$.

Mit $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ gehört $t\,\Phi_1(z)+(1-t)\,\Phi_2(z)$ $(0\leqq t\leqq 1)$, mit $\Phi_i(z)$ $(1\leqq i\leqq n)$ auch $\sqrt[n]{\Phi_1(z)\,\Phi_2(z)\dots\Phi_n(z)}$ zu $\mathfrak{R}$.

So gehört z. B. mit $\frac{1-z}{1+z}$ und $\frac{1-z^2}{1-2z\cos\vartheta+z^2}$ auch

$$\frac{1-z}{\sqrt{1-2z\cos\vartheta+z^2}}=\sqrt{\frac{1-z}{1+z}\cdot\frac{1-z^2}{1-2z\cos\vartheta+z^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(P_n(\cos\vartheta)-P_{n-1}(\cos\vartheta))z^n \tag{25}$$

zu $\mathfrak{R}$.

2. Wir wollen jetzt die Ungleichung (11) der Einleitung für die Bogenlängen $L(r)$ beweisen:

Es sei $0<|z|=r<\varrho<1$. Z. B. aus (1) folgt die bekannte Darstellung

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varrho,\vartheta)\,\Phi^*\left(\frac{z\,e^{-i\vartheta}}{\varrho}\right)d\vartheta;\qquad \Phi^*(z)=\frac{1+z}{1-z}. \tag{26}$$

[11])

Hieraus ergibt sich sofort

$$|\Phi'(z)|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(\varrho,\vartheta)}{\varrho}\left|\Phi^{*\prime}\left(\frac{z\,e^{-i\vartheta}}{\varrho}\right)\right|d\vartheta,$$

$$\text{(a)}\qquad L(r)=\int_0^{2\pi} r\,|\Phi'(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\varrho,\vartheta)\int_0^{2\pi}\frac{r}{\varrho}\cdot\left|\Phi^{*\prime}\left(\frac{re^{i(\varphi-\vartheta)}}{\varrho}\right)\right|d\varphi\,d\vartheta$$

$$=L^*\left(\frac{r}{\varrho}\right)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\varrho,\vartheta)\,d\vartheta=L^*\left(\frac{r}{\varrho}\right).$$

Beachtet man noch, daß das Bild des Kreises $|z|=r$ bei der Abbildung durch $\Phi^*(z)$ der Kreis über der Strecke $\frac{1-r}{1+r},\ \frac{1+r}{1-r}$ als Durchmesser ist, so folgt (11) aus (a) mit $\varrho\to 1$.

[11]) Den einfachen Beweis vermittels (26) verdanke ich einer Bemerkung von Herrn G. Szegö.

Genau so findet man, daß die Bogenlänge des Bildes eines Radius des Kreises $|z| = r < 1$ bei der Abbildung durch ein $\Phi(z)$ höchstens gleich $\frac{2r}{1-r^2}$ ist. Das ist die Länge des Bildes des Radius $0, r$ bei der Abbildung durch $\Phi^*(z)$.

Es sei endlich noch ein zweiter Beweis für (11) gegeben, der zugleich den Fall des Gleichheitszeichens zu diskutieren gestattet:

Setzt man

(b) $$\chi(z) = \frac{\Phi(z)-1}{\Phi(z)+1},$$

so ist

(c) $$\chi(0) = 0; \quad |\chi(z)| < 1 \quad \text{in} \quad |z| < 1$$

und also bekanntlich[12]) in Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas

(d) $$|\chi'(z)| \leqq \frac{1-|\chi(z)|^2}{1-|z|^2} \qquad (|z| < 1),$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $\chi(z) \equiv z\, e^{i\vartheta}$ richtig ist. In unserem Falle besagt dies

(e) $$|\Phi'(z)| \leqq \frac{1}{2} \frac{|\Phi(z)+1|^2 - |\Phi(z)-1|^2}{1-|z|^2}.$$

Wegen

(f) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r\,|\Phi(r\,e^{i\varphi}) \pm 1|^2\, d\varphi = (1 \pm 1)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\mathsf{A}_n|^2\, r^{2n}$$

wird also

(11) $$L(r) = \int_0^{2\pi} r\,|\Phi'(r\,e^{i\varphi})|\, d\varphi \leqq \frac{2\pi}{2} \cdot \frac{4r}{1-r^2} = \frac{4r\pi}{1-r^2},$$

und das Gleichheitszeichen ist nur für $\Phi(z) \equiv \frac{1+z\,e^{i\vartheta}}{1-z\,e^{i\vartheta}}$ richtig.

§ 2.

Der Variabilitätsbereich der A_n und α_n.

1. Der *Variabilitätsbereich der Koeffizienten* A_n *einer Potenzreihe aus* $\mathfrak{R}$ ist nach Herrn Carathéodory [1]) der folgende:

Es sei $n \geqq 1$ ganz. Wir nennen im $2n$-dimensionalen Raume R_{2n} den Punkt Π_n mit den Koordinaten

(27) $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \qquad (\mathsf{A}_k = \alpha_k + i\,\beta_k)$$

den n-ten Repräsentanten der Funktion $\Phi(z)$.

---

[12]) E. Lindelöf, Mémoire sur certaines Inégalités ..., Acta Soc. Scient. Fenn. 25 (1908), S. 1–35.

Π_n liegt dann in der (abgeschlossenen) konvexen Hülle K_n der $2n$-dimensionalen Kurve

$$(\Gamma_n) \quad 2\cos\vartheta, 2\cos 2\vartheta, \ldots, 2\cos n\vartheta; \quad 2\sin\vartheta, 2\sin 2\vartheta, \ldots, 2\sin n\vartheta,$$

und umgekehrt ist jeder Punkt von K_n n-ter Repräsentant einer Potenzreihe aus $\mathfrak{R}$.

Die Punkte von K_n besitzen die eineindeutige Parameterdarstellung

$$(28) \quad \begin{matrix} \alpha_k = 2\sum_{j=1}^{\mathfrak{S}} \mu_j \cos k\vartheta_j \\ \beta_k = 2\sum_{j=1}^{\mathfrak{S}} \mu_j \sin k\vartheta_j \end{matrix}; \; 1 \leqq k \leqq n; \; 0 \leqq \mathfrak{S} \leqq n; \; \mu_j > 0; \; \sum_{j=1}^{\mathfrak{S}} \mu_j \leqq 1; \; -\pi < \vartheta_j \leqq \pi.$$

Die Oberfläche Ω_n von K_n ist dabei durch $\sum_{j=1}^{\mathfrak{S}} \mu_j = 1$ charakterisiert, und ihre Punkte entsprechen eineindeutig den n-ten Repräsentanten der rationalen Funktionen

$$(29) \quad \mathsf{P}(z) = \sum_{j=1}^{\mathfrak{S}} \mu_j \frac{1 + z e^{i\vartheta_j}}{1 - z e^{i\vartheta_j}}; \qquad \sum_{j=1}^{\mathfrak{S}} \mu_j = 1$$

und nur von diesen.

2. Hieraus folgt leicht der weitere Carathéodorysche Satz [1]):

Eine Potenzreihe (3) gehört dann und nur dann zu $\mathfrak{R}$, wenn alle ihre n-ten Repräsentanten in den entsprechenden K_n liegen.

3. Herr Toeplitz [4]) hat die folgende algebraische Charakterisierung von K_n gegeben:

Die Punkte von K_n sind dadurch gekennzeichnet, daß für sie die n Hermiteschen Determinanten

$$(30) \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} 2 & \mathsf{A}_1 & \mathsf{A}_2 & \ldots & \mathsf{A}_n \\ \overline{\mathsf{A}}_1 & 2 & \mathsf{A}_1 & \ldots & \mathsf{A}_{n-1} \\ \overline{\mathsf{A}}_2 & \overline{\mathsf{A}}_1 & 2 & \ldots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{\mathsf{A}}_n & \overline{\mathsf{A}}_{n-1} & \ldots & \ldots & 2 \end{vmatrix}; \quad 1 \leqq k \leqq n,$$

entweder alle positiv sind oder von einer gewissen Stelle an, bis zu der sie positiv sind, sämtlich verschwinden. Im letzteren Falle erhält man die Oberfläche Ω_n.

4. Wir betrachten nunmehr die Potenzreihen (5) der Unterklasse $\mathfrak{R}_r$. Ist $\Phi(z)$ aus $\mathfrak{R}$, so ist

$$(31) \quad \varphi(z) = \frac{\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}}{2} \quad \text{mit} \quad \alpha_n = \mathfrak{R}(\mathsf{A}_n)$$

aus $\mathfrak{R}_r$, und so kann man ersichtlich alle $\varphi(z)$ gewinnen.

Aus $\Phi^*(z\,e^{i\vartheta}) = \dfrac{1+z\,e^{i\vartheta}}{1-z\,e^{i\vartheta}}$ ergibt sich z. B.

$$(32) \qquad \varphi_\vartheta(z) = \frac{1-z^2}{1-2z\cos\vartheta+z^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\vartheta z^n$$

als zu $\mathfrak{R}_r$ gehörig.

5. Der *Variabilitätsbereich der* α_n ist der folgende:

Es sei $n \geqq 1$ ganz. Wir nennen im n-dimensionalen Raume R_n den Punkt π_n mit den Koordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ den n-ten Repräsentanten der Funktion $\varphi(z)$.

π_n liegt dann in der (abgeschlossenen) konvexen Hülle $\varkappa_n$ der n-dimensionalen Kurve

$$(\gamma_n) \qquad 2\cos\vartheta,\ 2\cos 2\vartheta,\ \ldots,\ 2\cos n\vartheta;\quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi,$$

und umgekehrt ist jeder Punkt von $\varkappa_n$ n-ter Repräsentant einer Potenzreihe aus $\mathfrak{R}_r$.

Die Punkte von $\varkappa_n$ besitzen die eineindeutige Parameterdarstellung

$$(33) \quad \alpha_k = 2\sum_{j=1}^{\Im}\mu_j\cos k\vartheta_j;\ 1 \leqq k \leqq n;\ 0 \leqq \Im \leqq p_{n+1};\ \mu_j > 0;\ \sum_{j=1}^{\Im}\mu_j \leqq 1;\ 0 \leqq \vartheta_j \leqq \pi,$$

wo p_n die Bedeutung aus (8) hat. Die Oberfläche ω_n von $\varkappa_n$ ist dabei durch $\sum_{j=1}^{\Im}\mu_j = 1$ charakterisiert, und ihre Punkte entsprechen eineindeutig den n-ten Repräsentanten der rationalen Funktionen

$$(34) \qquad \varrho(z) = \sum_{j=1}^{\Im}\mu_j\frac{1-z^2}{1-2z\cos\vartheta_j+z^2};\qquad \sum_{j=1}^{\Im}\mu_j = 1$$

und nur von diesen.

Zum Beweise beachte man, daß für die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jedenfalls die Parameterdarstellungen (28) gelten, wobei die $\beta_k = 0$ sind. Ersetzt man hierin die $\vartheta_j \neq 0, \pi$ durch $-\vartheta_j$, so bleiben diese Darstellungen richtig. Wegen der Eineindeutigkeit muß also in (28) mit jedem solchen ϑ_j auch $-\vartheta_j$ und zwar mit gleichem μ_j auftreten. Ändert man die Bezeichnung, indem man für die $\vartheta_j \neq 0, \pi$ die μ_j durch $\frac{\mu_j}{2}$ ersetzt, so erhält man ersichtlich eine, und zwar durch π_n eindeutig bestimmte Darstellung (33). Umgekehrt aber gibt es, wenn man (33) als die erste Hälfte der Formeln (28) auffaßt, einen n-ten Repräsentanten Π_n und also nach (31) auch einen n-ten Repräsentanten π_n mit diesen α_k.

Damit ist die eineindeutige Parameterdarstellung (33) und also insbesondere die behauptete Lage von π_n in $\varkappa_n$ bewiesen.

Die Behauptung (34) über die Repräsentanten der Oberfläche ω_n folgt ebenso aus (29) unter Beachtung von

$$\text{(a)} \qquad \frac{1+z\,e^{i\vartheta}}{1-z\,e^{i\vartheta}}+\frac{1+z\,e^{-i\vartheta}}{1-z\,e^{-i\vartheta}}=\frac{2(1-z^2)}{1-2z\cos\vartheta+z^2}=2\varphi_\vartheta(z).$$

6. Wir wollen das Ergebnis an den Fällen $n=1$ und $n=2$ illustrieren.

Für $n=1$ ist $\varkappa_1$ die Strecke $\langle -2, 2\rangle$, die Oberfläche ω_1 artet in die beiden Endpunkte aus. Nach (8) ist p_2 gleich 0 oder 1, und die Ecken ± 2 werden nur bei $\frac{1\pm z}{1\mp z}$ erreicht.

$\varkappa_2$ ist das Parabelsegment, welches zu

$$(35) \qquad y=x^2-2; \qquad |x|\leqq 2$$

gehört.

p_3 ist gleich 1 oder 2. Zum Parabelbogen der „Oberfläche" ω_2 gehören die Funktionen $\varphi_\vartheta(z)$, zur Sehne die Funktionen

$$t\cdot\frac{1+z}{1-z}+(1-t)\frac{1-z}{1+z}, \qquad 0\leqq t\leqq 1.$$

7. Aus 2. bzw. 3. dieses Paragraphen folgt ebenso:

Eine Potenzreihe (5) gehört dann und nur dann zu $\Re_r$, wenn alle ihre n-ten Repräsentanten in den entsprechenden $\varkappa_n$ liegen.

Die Punkte von $\varkappa_n$ sind dadurch charakterisiert, daß für sie die n symmetrischen Determinanten

$$(36) \qquad \delta_k=\begin{vmatrix} 2 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & 2 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \dots & 2 \end{vmatrix}; \qquad 1\leqq k\leqq n$$

entweder alle positiv sind oder von einer gewissen Stelle an, bis zu der sie positiv sind, sämtlich verschwinden. Im letzteren Falle erhält man die Oberfläche ω_n.

§ 3.

Lineare Koeffizientenbildungen aus $\Re$.

Die bei weitem meisten und wichtigsten Anwendungen der Klasse $\Re$ beziehen sich auf lineare Bildungen der Form

$$(12) \qquad A=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n A_n \qquad (\lambda_n \text{ beliebig komplex}).$$

1. Für sie gilt der folgende sehr allgemeine Satz:

Die Summe

$$A(\vartheta) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e^{in\vartheta} \tag{37}$$

sei als gleichmäßig konvergent für alle ϑ vorausgesetzt.

Dann ist A für jedes $\Phi(z)$ konvergent und liegt in der (abgeschlossenen) konvexen Hülle der Kurve $A(\vartheta)$. Jeder solche A-Wert wird auch wirklich für ein geeignetes $\Phi(z)$ angenommen.

Ist g eine solche Stützgerade von $A(\vartheta)$, auf der nur endlich viele Punkte $A(\vartheta_j)$ $(1 \leqq j \leqq \mathfrak{J})$ liegen, so werden die auf g liegenden Randpunkte der konvexen Hülle nur von den zugehörigen rationalen Funktionen (29) erreicht.

Beweis. Es sei zunächst eine endliche Summe

$$A = \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \mathsf{A}_n \tag{12a}$$

gegeben. Nach (28) ist

$$A = 2 \sum_{n=1}^{m} \lambda_n \sum_{j=1}^{\mathfrak{J}} \mu_j (\cos n\vartheta_j + i \sin n\vartheta_j) \qquad 0 \leqq \mathfrak{J} \leqq m;\ -\pi < \vartheta_j \leqq \pi \tag{38}$$

$$= 2 \sum_{j=1}^{\mathfrak{J}} \mu_j \sum_{n=1}^{m} \lambda_n e^{in\vartheta_j} = \sum_{j=1}^{\mathfrak{J}} \mu_j A(\vartheta_j). \qquad \mu_j > 0,\ \sum_{j=1}^{\mathfrak{J}} \mu_j \leqq 1.$$

Dabei bestimmen die $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_m$ eineindeutig die μ_j und ϑ_j. A hat also wirklich die angegebene Lage und auch die Behauptung über das Erreichen von Randpunkten auf einer Stützgeraden g[13]) ist nach (29) evident, da für andere Funktionen die A_i nach (38) sicher kein A auf g liefern.

Im allgemeinen Falle zeigt das bisherige Ergebnis, angewandt auf die Summen $\sum_{r}^{s} \lambda_n \mathsf{A}_n$ zunächst die Konvergenz von A. Und angewandt auf die Teilsummen $\sum_{n=1}^{m} \lambda_n \mathsf{A}_n$ liefert es die behauptete Lage von A.

Daß jeder solche A-Wert auch wirklich angenommen wird, ergibt sich daraus, daß jeder Punkt der konvexen Hülle von $A(\vartheta)$ in der Form $tA(\vartheta_1) + (1-t)A(\vartheta_2)$, $0 \leqq t \leqq 1$ darstellbar ist und also z. B. A-Wert für $t\Phi^*(ze^{i\vartheta_1}) + (1-t)\Phi^*(ze^{i\vartheta_2})$ ist. Die Behauptung über das Erreichen von Randpunkten auf einer Stützgeraden g, die nur endlich viele Punkte ϑ_j trägt, beweist man am besten aus den aus (1) wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $A(\vartheta)$ folgenden Fourierformeln,

[13]) In diesem Falle liegen auf einer Stützgeraden von selbst höchstens m Punkte $A(\vartheta_j)$.

$$(26\,a) \qquad \Phi(z) = \lim_{\varrho \to 1} \Phi(\varrho z) = \lim_{\varrho \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \vartheta)\, \Phi^*(z e^{-i\vartheta})\, d\vartheta,$$

$$(39) \qquad \Lambda = \lim_{\varrho \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathsf{A}_n \varrho^n = \lim_{\varrho \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varrho, \vartheta)\, \Lambda(-\vartheta)\, d\vartheta,$$

$$|z| < 1;\ 0 < \varrho < 1,$$

indem man die von Herrn Carathéodory zu ähnlichem Zwecke[14]) benutzte Methode sinngemäß, aber im übrigen wörtlich überträgt. Auf eine Darstellung des Beweises darf somit hier verzichtet werden.

Wir gehen nunmehr zu Anwendungen über.

2. $\Lambda = \mathsf{A}_n$, also $\Lambda(\vartheta) = 2e^{in\vartheta}$ liefert die bekannte Koeffizientenabschätzung $|\mathsf{A}_n| \leqq 2$. Die Diskussion des Gleichheitszeichens ist nach 1. ersichtlich.

3. Es sei $|z| < 1$. $\lambda_n = z^n$, also $1 + \Lambda = \Phi(z)$ und $1 + \Lambda(\vartheta) = \Phi^*(z e^{i\vartheta})$ ergibt die bekannten „Carathéodoryschen Ungleichungen" für die Funktionen aus $\mathfrak{R}$:

Für $|z| = r < 1$ liegt $\Phi(z)$ im Kreise $\Phi^*(r e^{i\vartheta})$, d. i. der Kreis über $\frac{1-r}{1+r}, \frac{1+r}{1-r}$ als Durchmesser; auf dem Rande nur für die Funktionen $\Phi^*(z e^{i\varphi})$.

Ebenso beweist man, wenn

$$(40) \qquad \Sigma_m(z) = 1 + \sum_{n=1}^{m} \mathsf{A}_n z^n; \qquad \Sigma_m^*(z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{m} z^n$$

gesetzt wird, den folgenden Satz[15]):

Es sei $k \geqq 0$ ganz[16]). *Die $z^k \Sigma_m^{(k)}(z)$ liegen für jedes $|z| = r$ in der konvexen Hülle der Kurve $z^k \Sigma_m^{*(k)}(z)$, $z = r e^{i\vartheta}$ und die $\frac{1}{z^k} \int_{(k)0}^{z} \Sigma_m(\zeta)\, d\zeta$ in der konvexen Hülle der Kurve $\frac{1}{z^k} \int_{(k)0}^{z} \Sigma_m^*(\zeta)\, d\zeta$, $z = r e^{i\vartheta}$.*

Insbesondere liegen für $|z| = r < 1$ die $z^k \Phi^{(k)}(z)$ bzw. $\frac{1}{z^k} \int_{(k)0}^{z} \Phi(\zeta)\, d\zeta$ in der konvexen Hülle der Kurven $z^k \Phi^{*(k)}(z)$ bzw. $\frac{1}{z^k} \int_{(k)0}^{z} \Phi^*(\zeta)\, d\zeta$, $z = r e^{i\vartheta}$.

[14]) Vgl. a. a. O. die erste Arbeit, § 4, S. 101—109, insbes. von S. 107 an.

[15]) Für $k = 0$ steht dieser Satz bereits in meiner unter [10]) zitierten Arbeit, Satz II und III. Doch ist, wie ich hiermit **berichtigen** möchte, der Satz III wegen der dortigen falschen Behauptung (16) im nach dem obigen Satze ersichtlichen Sinne zu ändern. Der Beweisteil B auf S. 267—268 liefert nur die Darstellung (21) für $f(z)$. Die l_j hängen darin auch von $f(z)$ ab; die letzten 4 Zeilen von § 2 sind mithin falsch. Der übrige Inhalt der Arbeit wird dadurch nicht berührt.

[16]) $g^{(k)}(z)$ bzw. $\int_{(k)} g(\zeta)\, d\zeta$ bezeichnen die k-te Ableitung bzw. das k-fach iterierte Integral von $g(z)$, für $k = 0$ $g(z)$ selbst.

Die zu dem Rande der jeweiligen konvexen Hülle gehörenden rationalen Funktionen (29) sind nach dem allgemeinen Satze unter 1. bestimmt.

4. Alle Abschnitte $\Sigma_m(z)$ besitzen in $|z| < \frac{1}{2}$ einen positiven Realteil, und $\frac{1}{2}$ ist in dieser Aussage die beste Konstante[10]). Denn die speziellen $\Sigma_m^*(z)$ haben, wie man leicht nachrechnet, diese Eigenschaft (vgl. auch den Schluß dieser Nummer).

Durch partielle Summierung folgt hieraus:

Bilden die nicht-negativen Zahlen $1, l_n$ *eine nicht-zunehmende Zahlenfolge, so besitzt*

$$\Phi_l(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} l_n \mathsf{A}_n z^n \tag{41}$$

in $|z| < \frac{1}{2}$ *einen positiven Realteil.*

Ebenso besitzen bekanntlich[17]) die ersten arithmetischen Mittel der $\Sigma_m(z)$ in $|z| < 1$ einen positiven Realteil; das folgt wieder aus der entsprechenden elementaren Eigenschaft der $\Sigma_m^*(z)$. Durch zweimalige partielle Summierung folgt jetzt:

Bilden die nicht-negativen Zahlen $1, l_n$ *eine nicht-zunehmende von unten konvexe Zahlenfolge, so gehört mit* $\Phi(z)$ *auch* $\Phi_l(z)$ *zu* $\mathfrak{R}$.

Schließlich haben Herr Szegö und ich auch die Zugehörigkeit der $\frac{1}{z}\int_0^z \Sigma_m(\zeta)\,d\zeta$ zu $\mathfrak{R}$ bewiesen[18]), was wieder aus der entsprechenden, schwieriger zu beweisenden Eigenschaft der $\Sigma_m^*(z)$ folgt.

Partielle Summierung ergibt:

Bilden die nicht-negativen Zahlen $1, (n+1)\,l_n$ *eine nicht-zunehmende Zahlenfolge, so gehört mit* $\Phi(z)$ *auch* $\Phi_l(z)$ *zu* $\mathfrak{R}$.

Diese Sätze über die $\Phi_l(z)$ sind insbesondere zur Bildung von Polynomen aus $\mathfrak{R}$ von Wichtigkeit; man braucht nur die l_n von einer gewissen Stelle an gleich 0 zu wählen[19]). So folgt der obige Satz über die Abschnitte aus dem über ihre arithmetischen Mittel mit der konvexen Folge $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, 0, 0, \ldots$.

5. Die Bildkurve von

$$l(z) = \int_0^z \frac{\Phi^*(\zeta) - 1}{\zeta}\,d\zeta = \int_0^z \frac{2}{1-\zeta}\,d\zeta = \log\frac{1}{(1-z)^2} \tag{a}$$

[17]) L. Fejér, Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierte Mittelkurven und Mittelflächen, Palermo Rend. **38** (1914), Satz V.

[18]) W. Rogosinski und G. Szegö, Über die Abschnitte von Potenzreihen, die in einem Kreise beschränkt bleiben, Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 73—94, § 5.

[19]) Vgl. hierzu L. Fejér, Einige Sätze, die sich auf das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen, Monatsh. f. Math. u. Phys. **35** (1928), S. 305—344, z. B. Satz XXV.

für $|z| = r < 1$ ist konvex. Denn es ist in $|z| < 1$

$$\Re\left(z\frac{l''(z)}{l'(z)}\right) = \Re\frac{z}{1-z} > -\frac{1}{2}. \quad (b)$$ [20]

Daher hat $\int_0^z \frac{\Phi(\zeta)-1}{\zeta}\,d\zeta$ in $|z|<1$ die Funktion $\log\frac{1}{(1-z)^2}$ zur Majorante [21], in Formeln

$$\int_0^z \frac{\Phi(\zeta)-1}{\zeta}\,d\zeta \prec \log\frac{1}{(1-z)^2} \text{ in } |z|<1. \quad (42)$$

Ist nun $g(z)$ eine in $|z|<1$ reguläre Funktion mit

$$g(0)=0; \quad \Re\, z\,g'(z) > -1 \text{ in } |z|<1, \quad (43)$$

so wird mit $\Phi(z) = 1 + z\,g'(z)$

$$\int_0^z \frac{\Phi(\zeta)-1}{\zeta}\,d\zeta = g(z), \quad (c)$$

und es ist also

$$g(z) \prec \log\frac{1}{(1-z)^2} \text{ in } |z|<1. \quad (44)$$

Diese Tatsache, noch auf die Abschnitte von $g(z)$ ausgedehnt, habe ich in einer früheren Arbeit [10]) bereits zu allgemeineren Zwecken angewandt.

In einer noch unveröffentlichen Arbeit hat Herr Marx [22]) eine interessante Anwendung von (44) gemacht:

Es sei

$$st(z) = z + b_2 z^2 + \ldots \quad (45)$$

eine in $|z|<1$ in bezug auf $z=0$ sternförmige Funktion, so daß $g(z) = \log\frac{st(z)}{z}$ die Voraussetzungen (43) erfüllt. (44) ergibt also den Marxschen Satz

$$\frac{st(z)}{z} \prec \frac{1}{(1-z)^2} \text{ in } |z|<1. \quad (46)$$

[20]) Vgl. G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze I, Berlin: Julius Springer 1925, III. Abschn., Aufg. 108.

[21]) *Es seien $f(z)$ und $F(z)$ in $|z|<1$ regulär, $F(z)$ überdies schlicht, $f(0)=F(0)$. $F(z)$ heißt Majorante von $f(z)$ in $|z|<1$, in Formel $f(z)\prec F(z)$ in $|z|<1$, wenn $w=f(z)$ im Bildgebiet $\mathfrak{G}$ der Abbildung $W=F(z)$ liegt. Nach dem Schwarzschen Lemma (Lindelöfsches Prinzip) liegt dann $f(z)$ auch für $|z|<r<1$ in dem Bildgebiet $\mathfrak{G}_r$, das $F(z)$ von diesen z liefert.*

[22]) A. Marx, Königsberger Dissertation (1930). Als Gegenstück zu (50) beweist Herr Marx die etwas tiefer gelegene interessante Eigenschaft $\Re\frac{k(z)}{z} > \frac{1}{2}$ für konvexe Funktionen $k(z)$.

Dies ist eine wesentliche Verschärfung der bekannten für allgemeine schlichte Potenzreihen $\sigma(z)$ geltenden Ungleichungen

$$(47) \qquad \frac{r}{(1+r)^2} \leqq |\sigma(z)| \leqq \frac{r}{(1-r)^2}; \qquad |z| \leqq r < 1$$

für die Unterklasse der sternförmigen Funktionen. Man beachte, daß $\frac{1}{(1-z)^2}$ den $|z| < 1$ auf das Äußere der Parabel mit dem Scheitel $\frac{1}{4}$ und dem Brennpunkte 0 abbildet.

(46) ist mit

$$(46\,a) \qquad \Re \sqrt{\frac{st(z)}{z}} > \frac{1}{2} \text{ in } |z| < 1$$

äquivalent. Angewandt auf $st(z) = \frac{z}{1-2z\cos\vartheta+z^2}$ gibt das die bemerkenswerte Eigenschaft

$$(48) \qquad \Re \frac{1}{\sqrt{1-2z\cos\vartheta+z^2}} > \frac{1}{2}$$

der Erzeugenden der Legendreschen Polynome $P_n(\cos\vartheta)$, was natürlich auch direkt leicht zu erweisen ist. Die bekannte Ungleichung $|P_n(\cos\vartheta)| \leqq 1$ ist eine unmittelbare Folge hiervon.

Eine andere interessante Anwendung von (46a) bezieht sich auf ungerade sternförmige Funktionen

$$(49) \qquad st_u(z) = z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \ldots; \qquad |z| < 1.$$

Sie sind mit der Gesamtheit der Funktionen $\sqrt{st(z^2)}$ äquivalent. *Daher ist*

$$(50) \qquad \Re \frac{st_u(z)}{z} = \Re \sqrt{\frac{st(z^2)}{z^2}} > \frac{1}{2} \quad \textit{in} \quad |z| < 1,$$

woraus insbesondere die bekannte Abschätzung $|b_k| \leqq 1$ *folgt.*

6. Es sei

$$(51) \qquad \mathsf{X}(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{B}_n z^n$$

in $|z| < 1$ regulär. Der allgemeine Satz unter 1. ergibt mit $\lambda_n = \frac{\mathsf{B}_n z^n}{2}$, daß für $|z| = r < 1$ und jedes $\Phi(z)$ aus $\Re$

$$(52) \qquad \Psi(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathsf{A}_n \mathsf{B}_n}{2} z^n$$

in der konvexen Hülle der Kurve $\mathsf{X}(re^{i\vartheta})$ liegt.

Insbesondere gehört also mit $\Phi(z)$ *und* $\mathsf{X}(z)$ *auch* $\Psi(z)$ *zu* $\Re$;[23] *und ist* $\mathsf{X}(z)$ *in* $|z| < 1$ *konvex, so gilt*

$$(53) \qquad \Psi(z) \prec \mathsf{X}(z) \quad \textit{in} \quad |z| < 1.$$

[23]) I. Schur, Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (Fortsetzung), Journ. f. d. reine u. angew. Math. **148** (1918), S. 122–145, Satz XIV.

Man beachte etwa, daß mit $\Phi(z)$ auch die Reihen

$$(54) \qquad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathsf{A}_n^2}{2}z^n; \qquad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mathsf{A}_n|^2}{2}z^n; \qquad 1+\sum_{n=1}^{\infty}\mathsf{A}_n P_n(\cos\vartheta)\,z^n$$

zu $\mathfrak{R}$ gehören. ($\mathsf{B}_n=\mathsf{A}_n$ bzw. $\bar{\mathsf{A}}_n$ bzw. $2P_n(\cos\vartheta)$.)

§ 4.

Lineare Koeffizientenbildungen aus $\mathfrak{R}_r$.

1. Für die linearen Bildungen

$$(55) \qquad \lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\alpha_n \qquad (\lambda_n \text{ beliebig komplex})$$

aus den Koeffizienten α_n einer Funktion $\varphi(z)$ aus $\mathfrak{R}_r$ beweist man aus der Parameterdarstellung (33), genau wie in § 3, 1., den folgenden Satz:

Die Summe

$$(56) \qquad \lambda(\vartheta)=2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\cos n\vartheta$$

sei als gleichmäßig konvergent für alle ϑ vorausgesetzt.

Dann ist λ für jedes $\varphi(z)$ konvergent und liegt in der (abgeschlossenen) konvexen Hülle der Kurve $\lambda(\vartheta)$. Jeder solche λ-Wert wird auch wirklich für ein geeignetes $\varphi(z)$ angenommen.

Ist g eine solche Stützgerade von $\lambda(\vartheta)$, auf der nur endlich viele Punkte $\lambda(\vartheta_j)$ $(1\leqq j\leqq\mathfrak{J})$ liegen, so werden die auf g liegenden Randpunkte der konvexen Hülle nur von den zugehörigen rationalen Funktionen (34) erreicht.

2. Als Anwendung sei hier nur die bereits in der Einleitung formulierte Verschärfung der „Carathéodoryschen Ungleichungen“ (§ 3, 3) für die Unterklasse $\mathfrak{R}_r$ genannt.

Man erhält sie bei festem z aus $|z|<1$ mit $\lambda_n=z^n$, also $1+\lambda=\varphi(z)$ und

$$(a) \qquad 1+\lambda(\vartheta)=\frac{1-z^2}{1-2z\cos\vartheta+z^2},$$

was den genannten Kreisbogen zwischen $\frac{1-z}{1+z}$ und $\frac{1+z}{1-z}$ ergibt. Die zum Rande gehörigen Funktionen sind nach 1. ersichtlich.

3. Beachtenswert ist die aus 2. durch Betrachtung von $g(z)=\frac{\varphi(z)-1}{\varphi(z)+1}$ unmittelbar folgende Verschärfung des „Schwarzschen Lemmas“ für die Potenzreihen mit *reellen* Koeffizienten:

Es sei in $|z|<1$

$$(57) \qquad g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n; \qquad c_n \text{ reell},$$

und daselbst $|g(z)|\leqq 1$.

Dann liegt für festes solches z der Punkt $g(z)$ in der (abgeschlossenen) Kreissichel, die die beiden Kreise durch $(1, z, -z)$ bzw. $(-1, z, -z)$ gemeinsam haben. Jeder solche Wert wird auch wirklich für ein passendes $g(z)$ angenommen.

Ist z nicht reell, so werden die Randpunkte nur von den Funktionen

$$G(z) = \pm z \frac{z - x}{z\,x - 1}; \qquad -1 \leqq x \leqq 1 \tag{58}$$

erreicht (Fig. 3).

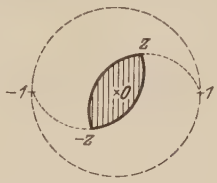


Fig. 3.

II. Abschnitt.

Über typisch-reelle Potenzreihen.

§ 1.

Die Klasse $\mathfrak{T}$ und ihre Beziehung zu $\mathfrak{R}_r$.

1. Eine in $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{4}$$

heißt daselbst *typisch-reell*, wenn sie für die reellen $|z| < 1$ und nur für diese reellwertig ist.

Notwendig sind die Koeffizienten a_n reell.

2. Zu der Klasse $\mathfrak{T}$ dieser $f(z)$ gehören insbesondere die *reellen schlichten Potenzreihen* $s(z)$, d. s. die in $|z| < 1$ schlichten Reihen (4) mit reellen Koeffizienten (Unterklasse $\mathfrak{T}_s$).

Wegen der reellen Koeffizienten gilt nämlich in $|z| < 1$ stets $f(\bar{z}) = \bar{f}(z)$, so daß für nicht-reelle solche z ein $s(z)$ nicht reell sein kann.

3. Wegen $f'(0) = 1$ ist für unsere $f(z)$ in $|z| < 1$

$$\operatorname{sign} \Im(f(z)) = \operatorname{sign} \Im(z), \tag{59}$$

und dies ist auch hinreichend für die Zugehörigkeit von $f(z)$ zu $\mathfrak{T}$. Mit anderen Worten, es ist

$$\Im f(r e^{i\varphi}) = v(r, \varphi) = r \sin\varphi + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^n \sin n\varphi \tag{60}$$

eine für $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \pi$ positive harmonische Sinusentwicklung, und umgekehrt kann jede solche Entwicklung als Imaginärteil einer in $|z| < 1$ typisch-reellen Potenzreihe angesehen werden.

4. Es ist

$$f'(x) > 0; \qquad -1 < x < 1. \tag{61}$$

Denn $f'(x)$ ist jedenfalls reell, und aus $f'(x)=0$ würde nach einem elementaren funktionentheoretischen Schluß ein Widerspruch zu (59) folgen. Endlich ist $f'(0)=1$. Wegen $f(0)=0$ ist also weiter für diese x

$$\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} x, \tag{62}$$

und insbesondere gilt daher

$$f(z) \neq 0 \quad \text{in} \quad 0<|z|<1. \tag{63}$$

5. Mit $f(z)$ gehört auch $-f(-z)$ zu $\mathfrak{S}$, ferner, wie aus der Definition des Integrals unter Beachtung von (59) folgt, auch $\int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta$ und $\int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta$.

Ebenfalls nach (59) ist mit $f_1(z)$ und $f_2(z)$ auch $t f_1(z)+(1-t) f_2(z)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ typisch-reell.

Die Betrachtung des arc von $f(z)$ zeigt ferner unter Beachtung von (63), daß für ganzes positives n mit $f(z)$ auch $\sqrt[n]{f(z^n)}$ und mit den $f_i(z)$ auch $\sqrt[n]{f_1(z) f_2(z) \dots f_n(z)}$ zu $\mathfrak{S}$ gehören.

Bekanntlich ist allgemein mit $s(z)$ auch $\sqrt[n]{s(z^n)}$ schlicht (reell schlicht, sternförmig). Die Funktion (20) der Einleitung ist z. B. sternförmig.

Ferner ist (man denke an die charakteristische Eigenschaft $\Re\, z\frac{s t'(z)}{s t(z)} > 0$) mit den $s t_i(z)$ auch $\sqrt[n]{s t_1(z)\cdot s t_2(z)\dots s t_n(z)}$ sternförmig. So ist z. B. auch

$$\frac{z}{\sqrt{1-2z\cos\vartheta+z^2}} = \sqrt{\frac{z}{1-2z\cos\vartheta+z^2}}\cdot z = \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}(\cos\vartheta)\, z^n \tag{64}$$

in $|z|<1$ sternförmig.

Es sei $-1<x<1$. Mit $f(z)$ ist dann auch

$$g(z;x) = \frac{f\left(\frac{z-x}{zx-1}\right)-f(x)}{f'(x)(x^2-1)} = z+\left\{\frac{f''(x)}{f'(x)}\,\frac{x^2-1}{2}+x\right\}z^2+\dots \tag{65}$$

typisch-reell. Nimmt ferner $f(z)$ in $|z|<1$ den reellen Wert c nicht an, so ist auch

$$h(z;c) = \frac{c f(z)}{c-f(z)} = z+\left(a_2+\frac{1}{c}\right)z^2+\left(a_3+\frac{2a_2}{c}+\frac{1}{c^2}\right)z^3+\dots \tag{66}$$

typisch-reell. Bekanntlich sind sogar $g(z)$ und $h(z)$ mit $f(z)$ schlicht.

6. Wir behaupten nunmehr, daß, wenn $f(z)$ eine Funktion aus $\mathfrak{S}$ ist,

$$\varphi(z) = f(z)\cdot\frac{1-z^2}{z} = 1+a_2 z+\sum_{n=2}^{\infty}(a_{n+1}-a_{n-1})z^n \tag{6}$$

zu $\mathfrak{R}_r$ gehört.

Zunächst ist $\varphi(z)$ mit $\varphi(0)=1$ in $|z|<1$ regulär und besitzt reelle Koeffizienten. Wird ferner $f=u+iv$ und $\frac{1-z^2}{z} = U+iV$ gesetzt, so ist

$$\Re\,\varphi(z) = uU-vV. \tag{a}$$

Man darf weiter beim Beweise voraussetzen, daß $f(z)$ in $|z| \leqq 1$ regulär ist; sonst hat man mit $0 < r < 1$, $r \to 1$ nur die $f_r(z) = \frac{f(rz)}{r}$ zu betrachten. Dann ist auch $\varphi(z)$ in $|z| \leqq 1$ regulär, und wegen

$$\text{(b)} \qquad \frac{1-z^2}{z} = \bar{z} - z = -2i \sin\vartheta; \qquad z = e^{i\vartheta}$$

ist nach (a) und (59) jedenfalls auf $|z| = 1$ und also erst recht für die $|z| < 1$ $\Re\varphi(z) \geqq 0$.

Sei jetzt umgekehrt $\varphi(z)$ eine Funktion aus $\Re_r$; wir behaupten, womit die Relation (6) eineindeutig wird, daß umgekehrt

$$\text{(6b)} \qquad f(z) = \varphi(z) \cdot \frac{z}{1-z^2} = z + \alpha_1 z^2 + (\alpha_2 + 1) z^3 + \dots$$

zu $\mathfrak{F}$ gehört.

Jedenfalls ist $f(z)$ eine in $|z| < 1$ reguläre Funktion mit reellen Koeffizienten und $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Wenn man ferner, was erlaubt ist, $\varphi(z)$ als in $|z| \leqq 1$ regulär voraussetzt, so wird $f(z)$ ebenfalls in $|z| \leqq 1$ regulär sein, bis auf eventuelle Pole erster Ordnung in $z = \pm 1$.

Aus (a) und (b) folgt nunmehr auf $|z| = 1$, $z \neq \pm 1$

$$\text{(c)} \qquad \operatorname{sign} \Im f(e^{i\vartheta}) = \operatorname{sign} \sin\vartheta \text{ oder } 0; \qquad \sin\vartheta \neq 0.$$

Ferner ist $f(x)$ für die reellen $-1 < x < 1$ reell und (62) erfüllt. Daraus folgt aber nach dem Extremalprinzip der Funktionentheorie, angewandt auf die obere und untere Hälfte des Einheitskreises, leicht (59), d. i. die Zugehörigkeit von $f(z)$ zu $\mathfrak{F}$. Denn ist $f(z)$ in $|z| \leqq 1$ regulär, so ist das ohne weiteres klar. Anderenfalls treten höchstens Pole erster Ordnung in $z = \pm 1$ auf, und man hat bei Anwendung des Extremalprinzips nur zu beachten, daß die Abbildung durch $f(z)$ in einem Pole erster Ordnung konform ist.

7. Schreibt man (6) in der Form

$$\text{(d)} \qquad \frac{1}{\eta(z)} = \frac{1}{f(z)} \left(\frac{z}{1-z^2}\right)^2 \cdot \frac{1-z^2}{z},$$

so erkennt man, daß mit $f(z)$ auch

$$(67) \qquad l(z) = \frac{1}{f(z)} \cdot \left(\frac{z}{1-z^2}\right)^2$$

zu $\mathfrak{F}$ gehört.

Wichtiger ist die folgende Bemerkung: $f_u(z)$ ist dann und nur dann ungerade, wenn das nach (6) zugehörige $\varphi^*(z)$ gerade ist. Die geraden Funktionen aus $\Re_r$ sind aber genau diejenigen von der Form $\varphi^*(z) = \varphi(z^2)$. Ist nun $f(z)$ die zu $\varphi(z)$ nach (6) gehörige Funktion aus $\mathfrak{F}$, so *wird*

$$(68) \qquad f_u(z) = \varphi^*(z) \frac{z}{1-z^2} = \varphi(z^2) \frac{z}{1-z^2} = f(z^2) \frac{1-z^4}{z^2} \cdot \frac{z}{1-z^2} = f(z^2) \frac{1+z^2}{z},$$

und ist umgekehrt $f(z)$ eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{F}$, so ist das $f_u(z)$ aus (68) *eine ungerade solche Funktion.*

8. Wir wollen nunmehr die in der Einleitung genannte Ungleichung (14) für die Bogenlängen $L(r)$ beweisen:

Es sei $0 < |z| = r < \varrho < 1$. Die Fourierformeln (17) ergeben

$$(69) \quad f(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(\varrho, \vartheta)\sin\vartheta\, F_\vartheta\left(\frac{z}{\varrho}\right) d\vartheta; \qquad F_\vartheta(z) = \frac{z}{1-2z\cos\vartheta+z^2},$$

und hieraus folgt

$$|f'(z)| \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{v(\varrho,\vartheta)}{\varrho}\sin\vartheta \left| F'_\vartheta\left(\frac{z}{\varrho}\right)\right| d\vartheta;$$

$$(e) \quad L(r) = \int_0^{2\pi} r\ f'(re^{i\varphi})\ d\varphi \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(\varrho,\vartheta)\sin\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{r}{\varrho}\ F'_\vartheta\left(\frac{re^{i\varphi}}{\varrho}\right)\Big| d\varphi\, d\vartheta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(\varrho,\vartheta)\sin\vartheta\, L^*_\vartheta\left(\frac{r}{\varrho}\right) d\vartheta.$$

Dabei bedeutet $L^*_\vartheta(r)$ die Bogenlänge des Bildes des Kreises $|z| = r$ bei der Abbildung durch $F_\vartheta(z)$. Die Funktionen $F_\vartheta(z)$ sind aber in $|z| < 1$ sternförmig, und für die allgemeinen sternförmigen Funktionen $st(z)$ hat Herr Marx [22]) bewiesen, daß die maximale Bogenlänge $L^*(r)$ des Bildes eines Kreises $|z| = r < 1$ bei der Abbildung durch ein $st(z)$ (nur) von den Funktionen $\frac{z}{(1-ze^{i\vartheta})^2}$ angenommen wird. Von diesen sind $\frac{z}{(1-z)^2}$ und $\frac{z}{(1+z)^2}$ reell.

Aus (e) folgt also weiter

$$(f) \qquad L(r) \leqq L^*\left(\frac{r}{\varrho}\right)\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(\varrho,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta = \varrho\cdot L^*\left(\frac{r}{\varrho}\right)$$

und mit $\varrho \to 1$ die behauptete Ungleichung (14).

§ 2.

Der Variabilitätsbereich der a_n.

1. Es sei $f(z)$ eine Funktion aus $\mathfrak{F}$ mit den Koeffizienten a_n, $\varphi(z)$ die zu ihr nach (6) gehörige Funktion aus $\mathfrak{R}_r$ mit den Koeffizienten α_n.

Dann ist für $k \geqq 1$

$$(70) \qquad \alpha_k = a_{k+1} - a_{k-1}; \qquad a_1 = 1,\ a_0 = 0,$$

oder umgekehrt für $k \geqq 2$

$$(71) \qquad a_k = \begin{matrix} \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{k-1} \\ 1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k-1} \end{matrix}, \qquad k \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix}.$$

Die Parameterdarstellung (33), in der n durch $n-1$ zu ersetzen ist, ergibt wegen

$$(72)\quad \frac{\sin k\vartheta}{\sin\vartheta} = \begin{matrix} 2(\cos\vartheta + \cos 3\vartheta + \ldots + \cos(k-1)\vartheta) \\ 1 + 2(\cos 2\vartheta + \cos 4\vartheta + \ldots + \cos(k-1)\vartheta) \end{matrix}, \quad k \begin{matrix} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{matrix}$$

für $2 \leqq k \leqq n$ die neue Darstellung

$$(7)\quad a_k = \sum_{j=1}^{\mathfrak{J}} \mu_j \frac{\sin k\vartheta_j}{\sin\vartheta_j};\ 2 \leqq k \leqq n;\ 0 \leqq \mathfrak{J} \leqq p_n;\ \mu_j > 0;\ \sum_{j=1}^{\mathfrak{J}} \mu_j = 1;\ 0 \leqq \vartheta_j \leqq \pi.$$

Diese Parameterdarstellung der n-ten Repräsentanten der Funktionen $f(z)$ ist eineindeutig, da die Beziehung zwischen $f(z)$ und $\varphi(z)$ nach (6) und die zwischen $\varphi(z)$ und den μ_j, ϑ_j eineindeutig ist. Da zu $\sum_{j=1}^{\mathfrak{J}} \mu_j = 1$ nach (6) und (34) nur die Funktionen (9) gehören, ist damit der in der Einleitung formulierte Variabilitätsbereich für die Funktionen aus $\mathfrak{J}$ vollständig bewiesen.

2. Die in der Einleitung genannten notwendigen und hinreichenden Bedingungen für typisch-reelle Potenzreihen sind ebenso eine unmittelbare Folgerung aus den analogen Bedingungen für die $\varphi(z)$ in I, § 2, 7.

Desgleichen folgt wegen (70) die algebraische Kennzeichnung des Variabilitätsbereiches K_n durch die Determinanten (10) aus der entsprechenden Bedeutung der Determinanten (36) für den Variabilitätsbereich $\varkappa_n$.

3. K_2 ist die Strecke $\langle -2, 2\rangle$, die Oberfläche O_2 artet in die beiden Endpunkte aus, die nur von den Funktionen $\frac{z}{(1 \pm z)^2}$ erreicht werden.

K_3 ist das Parabelsegment, welches zu

$$(73)\qquad y = x^2 - 1; \qquad |x| \leqq 2$$

gehört. Zum Parabelbogen der „Oberfläche“ O_3 gehören die Funktionen $F_\vartheta(z)$, zur Sehne die Funktionen $t \cdot \frac{z}{(1+z)^2} + (1-t)\frac{z}{(1-z)^2}$, $0 \leqq t \leqq 1$.

Wir merken uns die aus (73) folgende Ungleichung

$$(74)\qquad a_3 - a_2^2 \geqq -1$$

für einen späteren Zweck an.

§ 3.

Lineare Koeffizientenbildungen aus $\mathfrak{J}$.

1. Für die linearen Bildungen

$$(15)\qquad L = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n a_n \qquad (\lambda_n \text{ beliebig komplex})$$

aus den Koeffizienten einer Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{S}$ folgt aus der Parameterdarstellung (7), genau wie in I, § 3, 1 — an die Stelle der Fourierformeln (26a) und (39) treten analoge der Bauart (69) —, der folgende Satz:

Die Summe

$$L(\vartheta) = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} \tag{75}$$

sei als gleichmäßig konvergent für alle ϑ vorausgesetzt.

Dann ist L für jedes $f(z)$ konvergent und liegt in der (abgeschlossenen) konvexen Hülle der Kurve $L(\vartheta)$. Jeder solche L-Wert wird auch wirklich für ein geeignetes $f(z)$ angenommen.

Ist g eine solche Stützgerade von $L(\vartheta)$, auf der nur endlich viele Punkte $L(\vartheta_j)$ $(1 \leqq j \leqq \mathfrak{J})$ liegen, so werden die auf g liegenden Randpunkte der konvexen Hülle nur von den zugehörigen rationalen Funktionen (9) erreicht.

2. $L(\vartheta) = \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}$ liefert nochmals die Koeffizientenungleichungen (16) der Einleitung.

Ist n gerade, so wird das Gleichheitszeichen rechts bzw. links nur von den Funktionen $\frac{z}{(1-z)^2}$ bzw. $-\frac{z}{(1+z)^2}$ erreicht.

Für ungerades n wird das rechte Gleichheitszeichen nur von den Funktionen $t \cdot \frac{z}{(1-z)^2} + (1-t)\frac{z}{(1+z)^2}$, das linke nur von $t F_{\vartheta_n}(z) - (1-t) F_{\pi-\vartheta_n}(z)$, $0 \leqq t \leqq 1$, erreicht. Auch die z. B. aus (70) ersichtliche Ungleichung

$$|a_{n+2} - a_n| \leqq 2 \qquad (n \geqq 0) \tag{76}$$

ist beachtenswert.

3. Die Ungleichung

$$1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2n+1} \geqq 0 \tag{18}$$

der Einleitung folgt aus

$$\frac{\sin\vartheta + \sin 3\vartheta + \ldots + \sin(2n-1)\vartheta}{\sin\vartheta} = \left(\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^2 \geqq 0. \tag{18a}$$

Partielle Summierung ergibt, daß, *wenn die nicht-negativen Zahlen* $1, l_n$ *eine nicht-zunehmende Folge bilden,*

$$f_u(z; l) = z + \sum_{n=2}^{\infty} l_n z^{2n-1} \tag{77}$$

typisch-reell ist.

Wegen

$$\frac{\sin\vartheta + \sin 2\vartheta + \ldots + \sin(n-1)\vartheta + \frac{1}{2}\sin n\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin n\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\right)^2 \geqq 0 \tag{78a}$$

gilt ferner

$$1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2} \geqq 0. \tag{78}$$

Weiter ist nach Lukács[24])

$$\frac{n \sin \vartheta + (n-1) \sin 2\vartheta + \ldots + \sin n\vartheta}{\sin \vartheta} \geqq 0, \tag{79a}$$

woraus

$$n + (n-1) a_2 + \ldots + a_n \geqq 0 \tag{79}$$

folgt. Zweimalige partielle Summierung ergibt:

Bilden die nicht-negativen Zahlen $1, l_n$ *eine nicht-zunehmende von unten konvexe Folge, so ist*

$$f(z; l) = z + \sum_{n=2}^{\infty} l_n z^n \tag{80}$$

typisch-reell.

Endlich ist bekanntlich[25]) — diese Tatsache liegt tiefer —

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \left(\sin \vartheta + \frac{\sin 2\vartheta}{2} + \ldots + \frac{\sin n\vartheta}{n} \right) \geqq 0. \tag{81a}$$

Also gilt auch

$$1 + \frac{a_2}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n} \geqq 0, \tag{81}$$

und partielle Summierung liefert, daß, *wenn die nicht-negativen Zahlen* $1, n l_n$ *eine nicht-zunehmende Folge bilden, die Funktion* $f(z; l)$ *aus* (80) *typisch-reell ist.* Man beachte wieder den für die Bildung typisch-reeller Polynome wichtigen Fall einer abbrechenden l-Folge!

Die Diskussion der Gleichheitszeichen in den obigen Ungleichungen bietet nach 1. keine Schwierigkeiten.

4. Der in der Einleitung genannte Satz über die Lage von $f(z)$ für ein festes z aus $|z| < 1$ wird durch

$$1 + L(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} z^n = F_\vartheta(z) \tag{a}$$

geliefert. Er folgt aber auch nach (6) aus dem analogen Satz in I, § 4, 2. für die $\varphi(z)$. Die Kreisberandung des Segments wird nur von den Funktionen $F_\vartheta(z)$, die Sehne nur von den Funktionen $t \frac{z}{(1+z)^2} + (1-t) \frac{z}{(1-z)^2}$, $0 \leqq t \leqq 1$, erreicht. Für reelle $0 \leqq x < 1$ ergibt sich als Grenzfall

$$\frac{x}{(1+x)^2} \leqq f(x) \leqq \frac{x}{(1-x)^2} \tag{82}$$

---

[24]) Siehe L. Fejér, die unter [19]) zitierte Arbeit, Satz XXIII.

[25]) D. Jackson, Über eine trigonometrische Summe, Palermo Rend. 32 (1911).

und insbesondere für den nach (61) (evtl. als $+\infty$) existierenden Grenzwert

$$f(1) = \lim_{x \to 1-0} f(x) \tag{83}$$

die Ungleichung

$$f(1) \geqq \frac{1}{4}. \tag{82a}$$

Analoges gilt für die negativen x. *Auf der reellen Achse gilt also der aus der Theorie der allgemeinen schlichten Funktionen bekannte Verzerrungssatz* (47) *auch für die typisch-reellen Funktionen.*

Der entsprechende in der Einleitung genannte Bereich für die ungeraden $f_u(z)$ ergibt sich einfach durch die Bemerkung (68), durch die auch die zum Rande gehörigen Funktionen ersichtlich werden.

Insbesondere gilt für die $0 \leqq x < 1$

$$\frac{x}{1+x^2} \leqq f_u(x) \leqq \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \tag{84}$$

und also

$$f_u(1) \geqq \frac{1}{2}. \tag{84a}$$

Auch dies bedeutet, allerdings nur in der unteren Abschätzung, eine Übertragung bekannter Eigenschaften der ungeraden schlichten Funktionen auf die typisch-reellen, solange x reell ist.

Genau so kann man nun die Bildschranken für $f'(z)$ bei festem z aus $|z| < 1$ bestimmen. Man hat nur

$$L(\vartheta) = F'_\vartheta(z) = \frac{1-z^2}{(1-2z\cos\vartheta+z^2)^2} \tag{b}$$

zu nehmen. Diese Kurve ist ein Kardioidenbogen. Insbesondere gilt für $0 \leqq x < 1$

$$\frac{1-x}{(1+x)^3} \leqq f'(x) \leqq \frac{1+x}{(1-x)^3}. \tag{85}$$

In ähnlicher Weise lassen sich natürlich die höheren Ableitungen behandeln.

5. Es sei $0 \leqq x < 1$. Wendet man die Ungleichung (82) auf die Funktion $g(z; x)$ aus (65) in $z = x$ an, so folgt

$$\frac{1-x}{1+x} \leqq x\frac{f'(x)}{f(x)} \leqq \frac{1+x}{1-x}. \tag{86}$$

Auch dies entspricht einer wichtigen Abschätzung[26]) aus der Theorie der schlichten Funktionen.

[26]) R. Nevanlinna, Über die konforme Abbildung von Sternbereichen, Finsk. Vetensh. Soc. Förh. **63** (1920/21).

6. Kennt man ein reelles c, z. B. $c = f(1)$, das von $f(z)$ in $|z| < 1$ nicht angenommen wird, so kann man alle die eben bewiesenen Ungleichungen vermittels der Funktion $h(z; c)$ aus (66) verschärfen.

Interessanter sind die aus (66) folgenden Ungleichungen

$$a_2 + \frac{1}{f(1)} \leqq 2; \qquad a_2 + \frac{1}{f(-1)} \geqq -2, \tag{87}$$

aus denen sich

$$\frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(-1)} \leqq 4 \tag{88}$$

ergibt. Auch sieht man, daß $f(1) \geqq \frac{1}{2}$ bereits für die $f(z)$ mit $a_2 = 0$ gilt.

7. Es sei $R > 0$. Sind für alle ϑ die Funktionen

$$Q_{\lambda,\vartheta}(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} z^n \tag{89}$$

in $|z| < R$ typisch-reell, so ist allgemein

$$f_\lambda(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_n a_n z^n \tag{90}$$

in $|z| < R$ typisch-reell.

Eine Anwendung hiervon ist der in der Einleitung genannte Satz über die Abschnitte (22) typisch-reeller Potenzreihen.

Mit $\lambda_n = 1$ für $2 \leqq n \leqq m$, sonst $\lambda_n = 0$, werden nämlich die $Q_{\lambda,\vartheta}(z)$ die m-ten Abschnitte der speziellen Funktionen $F_\vartheta(z)$. Da diese letzteren schlichte Funktionen sind, sind ihre Abschnitte nach einem Satze von Herrn Szegö[9]) in $|z| < \frac{1}{4}$ ebenfalls schlicht, also erst recht typisch-reell. Also sind überhaupt alle $s_m(z)$ in $|z| < \frac{1}{4}$ typisch-reell. Daß aber $\frac{1}{4}$ in dieser Aussage die beste Konstante ist, zeigt schon der zweite Abschnitt $z + 2z^2$ der Funktion $\frac{z}{(1-z)^2}$.

Übrigens braucht man den nicht ganz einfach zu beweisenden Szegöschen Satz für unsere Zwecke nicht, da man die Behauptung für die m-ten Abschnitte der $F_\vartheta(z)$ unschwer direkt verifizieren kann.

Durch partielle Summierung folgt:

Bilden die nicht-negativen Zahlen $1, \lambda_n$ *eine nicht-zunehmende Folge, so ist die Funktion* $f_\lambda(z)$ *aus* (90) *in* $|z| < \frac{1}{4}$ *typisch-reell.*

8. Es sei $R > 0$ und $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ in $|z| < R$ typisch-reell. Dann ist für $0 \leqq r < R$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n r^n \geqq 0. \tag{91}$$

Man erhält z. B. mit $g(z) = -f(-z)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n^2 r^{2n} \geqq 0; \qquad 0 \leqq r < 1 \tag{92}$$

und mit $g(z) = \frac{z}{\sqrt{1 - 2z\cos\vartheta + z^2}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos\vartheta) r^n \geqq 0;^{27}) \qquad 0 \leqq r < 1. \tag{93}$$

Für die a_n kann man insbesondere auch (abbrechende) l-Folgen wie in 3. wählen.

§ 4.

Bemerkungen über reelle schlichte Potenzreihen.

1. Es bezeichne im folgenden $s(z)$ eine in $|z| < 1$ konvergente *reelle schlichte* Potenzreihe, also eine Funktion der Unterklasse $\mathfrak{S}_s$. Die aus dem Satze II, § 3, 1. zu gewinnenden Ergebnisse werden für die $s(z)$ nur so weit scharf sein, wie die Extremalfunktionen (9) zu $\mathfrak{S}_s$ gehören. Da die $F_\vartheta(z)$ dies tun, so sind z. B. die Ungleichungen (16) auch für $\mathfrak{S}_s$ Bestaussagen.

In der Aussage über das Kreissegment, in dem $s(z)$ bei festem z aus $|z| < 1$ liegt (II, § 3, 4.), ist nur die Kreisberandung nicht zu verbessern, während die zur Sehne gehörigen Funktionen $t \cdot \frac{z}{(1+z)^2} + (1-t)\frac{z}{(1-z)^2}$, $0 < t < 1$, wie man leicht erkennt, nicht schlicht sind. Den wahren Wertbereich für $s(z)$ zu finden, dürfte von der Schwierigkeit der allgemeinen Schlichtheitsprobleme sein; doch gibt die allgemeine Ungleichung (47) unter Umständen eine gewisse Verbesserung.

2. Für die *ungeraden* $s_u(z)$ kann man dagegen die allgemeine Aussage über die $f_u(z)$ verbessern, allerdings ebenfalls nicht zu dem scharfen Wertbereich. Denn die Formel

$$s_u(z) = \sqrt{s(z^2)} \tag{94}$$

liefert bekanntlich alle diese $s_u(z)$. Aus dem Kreissegment für die $s(z)$ gewinnt man so einen Bereich mit den Ecken $\frac{z}{1+z^2}$ und $\frac{z}{1-z^2}$, der von einem für die $s_u(z)$ nicht zu verbessernden Lemniskatenbogen und von einem (für $\mathfrak{S}_s$ nicht scharfen) Bogen einer gleichseitigen Hyperbel begrenzt ist. Dieser Bereich ist wegen der Zugehörigkeit von $\sqrt{f(z^2)}$ zu den $f_u(z)$ ein echter Teil des Kreissegments für diese.

Insbesondere erhält man so für $0 \leqq x < 1$ die scharfe Ungleichung

$$\frac{x}{1+x^2} \leqq s_u(x) \leqq \frac{x}{1-x^2}, \tag{95}$$

wie es nach den bekannten Verzerrungssätzen sein muß.

---

[27]) Vgl. L. Fejér, die unter [8]) zitierte Arbeit, Satz VI.

3. Wir schließen mit einigen Abschätzungen für die Koeffizienten einer ungeraden reellen schlichten Potenzreihe

$$s_u(z) = z + a_3 z^3 + a_5 z^5 + \dots . \tag{96}$$

Aus (94) folgt

$$s(z) = z + 2a_3 z^2 + (2a_5 + a_3^2) z^3 + \dots . \tag{a}$$

Also ist zunächst $|2a_3| \leqq 2$, d. i.

$$-1 \leqq a_3 \leqq 1. \tag{23a}$$

Weiter folgt aus (74) die Ungleichung $(2a_5 + a_3^2) - (2a_3)^2 \geqq 1$, d. i.

$$a_5 \geqq -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} a_3^2 \geqq -\frac{1}{2}. \tag{23b}$$

Die Funktionen $s_u(z) = \frac{z}{1 \pm z^2}$ bzw. $\frac{z}{\sqrt{1+z^4}}$ zeigen, daß diese Abschätzungen scharf sind. Nach oben scheint man dagegen auf diesem Wege, also ohne volle Ausnutzung der Schlichtheit, keine genaue Abschätzung für a_5 gewinnen zu können.

Endlich ergibt sich die allgemeine Abschätzung

$$|a_n| \leqq 2 \tag{24}$$

der Einleitung aus der einfachen Bemerkung, daß $\frac{s_u(z)}{z}$ in $|z| < 1$ einen positiven Realteil besitzt, also eine Funktion $\varphi(z)$ ist. In der Tat ist ja für ein $s_u(z)$ nicht nur die reelle, sondern auch die imaginäre Achse Symmetrieachse der Abbildung. Daraus folgt aber diese Behauptung.

Königsberg i. Pr., den 13. März 1931.

(Eingegangen am 21. März 1931.)

Limitierung mehrfacher Folgen nach dem Verfahren der arithmetischen Mittel.

Von

S. Bochner in München.

Aus der Konvergenz einer Doppelfolge

$$s_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

folgt nicht die Konvergenz der Folge ihrer arithmetischen Mittel[1])

$$\sigma_{kl} = \frac{1}{kl} \sum_{1}^{k} \sum_{1}^{l} s_{\varkappa\lambda} \qquad (k, l = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Es besteht aber der Permanenzsatz: Sind beide Folgen konvergent, so sind ihre Grenzwerte einander gleich.

In der vorstehenden Arbeit von F. Lösch („Über den Permanenzsatz gewisser Limitierungsverfahren für Doppelfolgen") wird der Permanenzsatz für allgemeinere Limitierungsverfahren bewiesen, aber der folgende, nur auf das M-Verfahren anwendbare Beweis ist recht kurz und läßt sich fast unmittelbar auf Folgen höherer Vielfachheit (§ 2) und auf den Fall restringierter Konvergenz (Def. in § 3) übertragen.

§ 1.

Satz. Die Folge (1) sei gegen einen endlichen Limes s konvergent. Sind ihre Elemente beschränkt,

$$|s_{kl}| \leqq S,$$

so ist auch die Folge (2) gegen s konvergent.

Sind ihre Elemente nicht beschränkt und ist die Folge (2) gegen einen endlichen Limes σ konvergent, so ist

$$s = \sigma.$$

---

[1]) Die zweite Folge werden wir als die (zugeordnete) M-Folge bezeichnen. Analog für einfache und beliebig mehrfache Folgen.

Beweis. Gegeben seien Zahlen ε, k_0, l_0, so daß

$$|s_{kl} - s| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad k > k_0,\ l > l_0.$$

Der erste Teil des Satzes folgt aus der Abschätzung

$$|\sigma_{kl} - s| \leqq \frac{1}{kl} \sum_{1}^{k} \sum_{1}^{l} |s_{\varkappa\lambda} - s| \leqq 2S \frac{k_0 l + k l_0}{kl} + \varepsilon$$
$$= 2S\left(\frac{k_0}{k} + \frac{l_0}{l}\right) + \varepsilon.$$

Im anderen Fall setzen wir

$$s_{kl} = a_{kl} + b_{kl},$$

wobei

$$a_{kl} = s_{kl} \quad \text{für} \quad k > k_0,\ l > l_0$$
$$= 0 \quad \text{für sonstige Indizes}$$

und entsprechend

$$\sigma_{kl} = \alpha_{kl} + \beta_{kl}.$$

Die Doppelfolge a_{kl} ist beschränkt und gegen s konvergent; daher ist auch

$$\lim \alpha_{kl} = s.$$

Nach Voraussetzung ist nunmehr

$$\lim \beta_{kl} = \sigma - s = W,$$

und wir haben zu zeigen, daß

$$W = 0.$$

Wir definieren:

$$p_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{l_0} s_{\varkappa\lambda}$$

und

$$q_\lambda = 0 \quad \text{für} \quad \lambda \leqq l_0$$
$$= \sum_{\varkappa=1}^{k_0} s_{\varkappa\lambda} \quad \text{für} \quad \lambda > l_0.$$

Dann ist für $k > k_0,\ l > l_0$

$$\beta_{kl} = \frac{p_1 + \ldots + p_k}{kl} + \frac{q_1 + \ldots + q_l}{kl}$$

oder

$$\beta_{kl} = \frac{A_k}{l} + \frac{B_l}{k}, \tag{3}$$

wobei A_k und B_l die den Folgen p_k und q_l zugeordneten M-Folgen sind. Wenn aber eine Doppelfolge der Gestalt (3) konvergiert, so hat ihr Limes den Wert Null.

Um dies zu beweisen, führen wir den Ausdruck

$$\Delta\varphi(kl) = kl\,\varphi(kl) - \bar{k}l\,\varphi(\bar{k}l) - k\bar{l}\,\varphi(k\bar{l}) + \bar{k}\bar{l}\,\varphi(\bar{k}\bar{l})$$

ein. Man verifiziert direkt, daß für $\varphi(kl) = \frac{A_k}{l}$ und für $\varphi(kl) = \frac{B_l}{k}$ dieser

Ausdruck verschwindet; also ist

$$\Delta \beta_{kl} = 0. \tag{4}$$

Nun ist

$$\beta_{kl} = W + \eta(kl), \tag{5}$$

wobei

$$\lim \eta(kl) = 0. \tag{6}$$

Substituiert man (5) in (4), so erhält man

$$(k - \bar{k})(l - \bar{l}) W = - \Delta \eta(kl).$$

Jetzt setzen wir

$$l = k, \qquad \bar{k} = \bar{l} = 2k$$

und bezeichnen mit $\eta(k)$ das Maximum der absoluten Beträge der Zahlen

$$\eta(k, k), \quad \eta(k, 2k), \quad \eta(2k, k), \quad \eta(2k, 2k). \tag{7}$$

Dies ergibt

$$|k^2 W| \leqq 16 k^2 \eta(k).$$

Wegen $\eta(k) \to 0$ folgt hieraus $W = 0$.

§ 2.

Satz. *Die t-fache Folge*

$$s_{k_1 \dots k_t} \qquad (k_1, \dots, k_t = 1, 2, 3, \dots) \tag{8}$$

sei gegen einen endlichen Limes s konvergent.

Sind ihre Elemente beschränkt,

$$|s_{k_1 \dots k_t}| \leqq S,$$

so ist auch die M-Folge

$$\sigma_{k_1 \dots k_t} \tag{9}$$

gegen s konvergent.

Sind ihre Elemente nicht beschränkt, und ist die Folge (9) gegen einen endlichen Limes σ konvergent, so ist

$$s = \sigma.$$

Beweis. Es wird genügen, dreifache Folgen zu erörtern. Wir werden eine solche Folge mit

$$s_{klm}$$

bezeichnen. Sie konvergiert gegen s, wenn man zu jedem ε Indizes k_0, l_0, m_0 finden kann, so daß

$$|s_{klm} - s| < \varepsilon \quad \text{für} \quad k > k_0,\ l > l_0,\ m > m_0.$$

Der erste Teil des Satzes folgt aus der Abschätzung

$$|\sigma_{klm} - s| \leqq \frac{1}{klm} \sum_{\varkappa, \lambda, \mu}' |s_{\varkappa\lambda\mu} - s| \leqq 2S\left(\frac{k_0}{k} + \frac{l_0}{l} + \frac{m_0}{m}\right) + \varepsilon.$$

Im andern Fall setzen wir

$$s_{klm} = a_{klm} + b_{klm},$$

wobei

$$a_{klm} = s_{klm} \quad \text{für} \quad k > k_0,\ l > l_0,\ m > m_0$$
$$= 0 \quad \text{für sonstige Indizes}$$

und entsprechend

$$\sigma_{klm} = \alpha_{klm} + \beta_{klm}.$$

Wiederum ist

$$\lim \alpha_{klm} = s,$$
$$\lim \beta_{klm} = \sigma - s = W,$$

und wir haben zu zeigen, daß

$$W = 0.$$

Wir definieren:

$$p_{\varkappa\lambda} = \sum_{\mu=1}^{m_0} s_{\varkappa\lambda\mu} \quad \text{für alle Indizes},$$
$$q_{\varkappa\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \leqq m_0$$
$$= \sum_{1}^{l_0} s_{\varkappa\lambda\mu} \quad \text{für sonstige Indizes},$$
$$r_{\lambda\mu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \leqq m_0 \text{ oder } \lambda \leqq l_0$$
$$= \sum_{1}^{k_0} s_{\varkappa\lambda\mu} \quad \text{für sonstige Indizes}$$

und bezeichnen mit A_{kl}, B_{km}, C_{lm} die den Folgen p_{kl}, q_{km}, r_{lm} zugeordneten M-Folgen. Dann ist für $k > k_0$, $l > l_0$, $m > m_0$

$$\beta_{klm} = \frac{A_{kl}}{m} + \frac{B_{km}}{l} + \frac{C_{lm}}{k}.$$

Nunmehr definieren wir den Ausdruck

$$\Delta\varphi(klm)$$

durch die sukzessiven Konstruktionen

$$\varphi_1(kl) = m\,\varphi(klm) - \overline{m}\,\varphi(kl\overline{m}),$$
$$\varphi_2(k) = l\,\varphi_1(kl) - \overline{l}\,\varphi_1(k\overline{l}),$$
$$\Delta\varphi(klm) = k\,\varphi_2(k) - \overline{k}\,\varphi_2(\overline{k}).$$

Es ist leicht zu sehen, daß

$$\Delta\beta_{klm} = 0;$$

daher

$$(k - \overline{k})(l - \overline{l})(m - \overline{m})\,W = -\Delta\eta(klm),$$

wo $\eta(klm)$ gegen Null konvergiert.

Jetzt setzen wir

$$l = m = k, \qquad \overline{k} = \overline{l} = \overline{m} = 2k$$

und schließen daraus, daß

$$|W| \leqq 2^6 \eta(k),$$

wo $\eta(k) \to 0$. Daher ist $W = 0$.

§ 3.

Für eine gewisse Anwendung [2]) bedarf es einer kleinen Verschärfung des zweiten Teils des obigen Satzes, die wir noch anbringen wollen.

Betrachten wir zweifache Folgen. Am Schluß von § 1 haben wir nicht die volle Limesrelation (6), sondern nur die Konvergenz der vier einfachen Folgen (7) benutzt. Wir wollen eine Doppelfolge

$$\varphi(k\,l) \qquad (k, l = 1, 2, 3, \ldots)$$

restringiert konvergent [3]) mit dem Limes φ nennen, falls jede einfache Teilfolge

$$\varphi(k_\varrho\, l_\varrho) \qquad (\varrho = 1, 2, 3, \ldots),$$

für welche die Quotienten

$$\frac{k_\varrho}{l_\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$$

zwischen zwei endlichen positiven Schranken gelegen sind [4]), im gewöhnlichen Sinne gegen φ konvergiert,

$$\lim_{\varrho \to \infty} \varphi(k_\varrho\, l_\varrho) = \varphi.$$

Man kann den zweiten Teil des Satzes aus § 1 leicht folgendermaßen verschärfen:

Wenn die Folge s_{kl} gegen einen endlichen Limes s konvergiert und die M-Folge σ_{kl} gegen einen endlichen Limes σ restringiert konvergiert, so ist $s = \sigma$.

Eine analoge Verschärfung gilt für t-fache Folgen, falls man den Begriff der restringierten Konvergenz entsprechend formuliert. Z. B. heiße die dreifache Folge $\varphi(k\,l\,m)$ gegen die Zahl φ restringiert konvergent, falls jede Teilfolge

$$\varphi(k_\varrho\, l_\varrho\, m_\varrho) \qquad (\varrho = 1, 2, 3, \ldots),$$

für welche die drei Folgen

$$\frac{k_\varrho}{l_\varrho}, \frac{k_\varrho}{m_\varrho}, \frac{l_\varrho}{m_\varrho} \qquad (\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$$

zwischen endlichen positiven Zahlen gelegen sind, im gewöhnlichen Sinne gegen φ konvergiert.

---

[2]) Vgl. S. Bochner, Die Poissonsche Summationsformel in mehreren Veränderlichen. Erscheint in den Math. Annalen.

[3]) C. N. Moore, Math. Annalen **74** (1913), S. 567.

[4]) D. h. für welche

$$0 < \underline{\lim} \frac{k_\varrho}{l_\varrho} \leq \overline{\lim} \frac{k_\varrho}{l_\varrho} < +\infty.$$

(Eingegangen am 11. April 1931.)

On many-valued "inner" Stieltjes integration.

Von

Rosalind Cecily Young in Cambridge (England).

I have indicated elsewhere [1]) the main lines of the theory of many-valued Riemann-Stieltjes integration corresponding to the ordinary definition of "Riemann" integrals with respect to a function.

In the present paper, I shall proceed a stage further with the definition, obtaining for every case there considered an integral "included" in the original one, with a usually much narrower range of many-valuedness.

For this purpose, the former definition will first be restated in terms of the *complete* (*many-valued*) *Riemann sums*, and the first addition theorem for many-valued Riemann-Stieltjes integration appealed to in the form that *the many-valued Riemann-Stieltjes integral contracts by subdivision.* A lemma on families of sets gives the *existence theorem* of inner integration theory, and leads to the definition of the inner integral

$$\int_a^b f(t)\,dg$$

as the (many-valued) limit of sums

$$\sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,dg$$

for a particular sequence of subdivisions of (a, b), the limit for any other sequence being necessarily a many-valued quantity *including* the inner integral. By transforming the definition in terms of the complete Riemann sums, the connection with known theories is obtained, and it is shewn that when the integrand is bounded and integrator monotone, the largest and least values of the "inner" integral are the ("modified") upper and lower Riemann-Stieltjes

[1]) "On Many-valued Riemann-Stieltjes integration", I and II, Cambridge Phil. Soc. Proceedings 27 (1931), pp. 325—380.

integrals defined respectively as the least limit of the upper, and the greatest limit of the lower, Darboux sums for sequences of subdivisions of (a, b) of norms tending to 0. The process of "inner" integration is however itself independent of any assumptions of boundedness of the integrand, besides yielding, through its many-valued form, more information than is possible by considerations of the Darboux type.

At the same time, it is seen that when the "inner" integral is one-valued, it coincides with the "modified" Stieltjes integral whose definition was suggested by S. Pollard [2]); while conversely it is one-valued whenever this "modified" integral exists.

The fundamental properties of "inner" integration are then obtained, in correspondence with those of many-valued Riemann-Stieltjes integration. The main addition theorem may now be stated: *The "inner" integral is unchanged by subdivision.* The formula of integration with respect to a one-valued integral is extended to *integration with respect to a one-valued "inner" integral.* Finally the special properties of "inner" integration with respect to a function of bounded variation are discussed.

As pointed out in my former paper, I am confining myself to one dimension and to the definition by sums of the "Riemann" type in order to render the ideas more easily accessible to any reader. The principles involved are however general principles of the theory of many-valued functions of intervals and their generalisations [3]), and the notation might be simplified considerably by enlisting the symbolic of the theory of functions of Σ [4]), or its analogue corresponding to the *innermost contraction* of the many-valued Riemann-Stieltjes integral, by which the inner integral is obtained. Indeed, with this symbolic, the most general theory becomes almost as simple as the present special case. But it seems best to keep the introduction of different classes of ideas as distinct as possible at the outset; and I shall accordingly confine myself here to the task of illustrating further, with a minimum of additional unfamiliar notions, the use of the Algebra of Many-valued Quantities.

[2]) Quart, Journ. **49** (1920—1921), p. 90. The definition as there stated requires however a *unicity theorem* which appears to have been taken for granted, and a supplementary clause which may be inferred from the context. Cp. p. 139 below.

[3]) These are applied throughout my Dissertation for the Cambridge Ph. D., "Foundations for the generalisation of the theory of Stieltjes integration and of the theory of length, area and volume" (1929). Cp. the brief abstract in the volume of abstracts of dissertations for the year 1928 to 1929, published by the Cambridge University Registrary.

[4]) "Functions of Σ defined by addition, etc.", Math. Zeitschr. **29**, 2/3. This symbolic is retained in my dissertation for the wider field of ideas.

§ 1.

The many-valued Riemann-Stieltjes integral.

In order that there may be no ambiguity in the definition to be given, and as an introduction to the notation and ideas employed, I shall first exhibit the precise definition of many-valued Riemann-Stieltjes integration as follows, using the simple notions of "many-valued" algebra set forth in my paper on this subject[5]):

Given any finite function $f(t)$, denote by

$$f(t_1, t_2)$$

the many-valued quantity having all, and only, the values of $f(t)$ in the closed interval

$$(t_1, t_2) = (t_1 \leqq t \leqq t_2).$$

The characteristic property of this quantity is that if

$$t_1' = t_1, t_2', \ldots, t_{q-1}', t_q' = t_2$$

provide any subdivision of (t_1, t_2), then $f(t_1, t_2)$ unites all the values of $f(t_i', t_{i+1}')$ for $i = 1, 2, \ldots, q-1$ in symbols:

$$f(t_1, t_2) = \overset{i=q-1}{\underset{i=1}{U}} f(t_i', t_{i+1}'). \tag{1}$$

In particular,

$$f(t_1, t_2) > f(t_i', t_{i+1}') \quad \text{for each } i. \tag{1}'$$

Now, given a second function $g(t)$, form the many-valued product

$$f(t_1, t_2)[g(t_2) - g(t_1)].$$

This has all the values which are products of the increment of $g(t)$ for the interval (t_1, t_2) by a value of $f(t)$ in the interval. Hence, if

$$t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b$$

provide any subdivision of a fundamental interval (a, b), the many-valued sum

$$\sum_{i=0}^{i=n} f(t_{i-1}, t_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})] \tag{2}$$

unites all, and only, the values of "Riemann sums" of $f(t)$ with respect to $g(t)$, in the ordinary sense, for the subdivision in question.

[5]) "The Algebra of Many-valued quantities" (Referred to in the sequel as "Many-valued algebra"), Math. Annalen **104** (1931), § 2, pp. 260—290.

I shall call this many-valued sum the *complete Riemann sum of* $f(t)$ *with respect to* $g(t)$ for the considered subdivision [6]).

If now we take any *sequence* of such subdivisions of (a, b), with norm (the length of the longest mesh) tending to zero, the corresponding complete Riemann sums have a many-valued limit [7]); and by uniting all the values of all such limits, for all sequences of subdivisions of (a, b), we obtain the *many-valued Riemann-Stieltjes integral of* $f(t)$ *with respect to* $g(t)$ for (a, b):

$$\int_a^b f(t)\,dg. \tag{3}$$

If we had confined ourselves to subdivisions all involving the points of division

$$a = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n = b,$$

(i. e. subdivisions *consecutive* to the one first considered), we should have to deal only with all the Riemann sums obtainable by adding together n complete Riemann sums relative to the n intervals (t_{i-1}, t_i). And *since we may subdivide each of these intervals independently*, to form a subdivision of the whole interval (a, b), it is at once clear that we may proceed to the limit independently with each of the n complete Riemann sums, i. e. take the *nple limit* of their sum, without transcending the range of the simple limits of Riemann sums for sequences of subdivisions consecutive to the considered one. *If all the limits in question are complete* [7]), this implies interchangeability of the addition and limit processes [8]), and shows that in this case the union of all limits obtained is the sum

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,dg. \tag{4}$$

The condition of completeness of the individual limits is equivalent to the requirement that the "Riemann" sums for subdivisions of each interval (t_{i-1}, t_i) should be bounded, and this again to the condition that *the complete Riemann sums relative to subdivisions of* (a, b) *consecutive to the given one are bounded.* Thus finally we are insured that *under this condition*, the values of the sum (4) are certainly among those of

[6]) In the general theory of many-valued Riemann-Stieltjes integration given in my Dissertation quoted above, many-valued sums of this type were utilized from the first. In the present developments, their use is more or less essential.

[7]) Loc. cit. prec. footnote [5]), § 7 (p. 275).

[8]) Same paper, § 8, Theorem V (p. 283).

the integral (3), i. e.

$$\text{(A)} \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,dg \subset \int_a^b f(t)\,dg.^{9})$$

This property is expressed by saying that *the (complete) many-valued Riemann-Stieltjes integral contracts by subdivision.*

An alternative definition[10]) of the many-valued Riemann-Stieltjes integral which is often useful, is obtained by interchanging the operations of union and passage to the limit still more completely, and first uniting *all the complete Riemann sums for subdivisions of* (a, b) *of norms less than* ε, — thus obtaining a many-valued function of the single variable ε, which of course contracts as ε is diminished, — and then proceeding to the limith with $\varepsilon \to 0$. That this new limit includes that of the "Riemann" sums for any sequence of subdivisions of (a, b) of norms tending to 0, (and hence the entire integral

$$\int_a^b f(t)\,dg),$$

is of course obvious, since the *frame*[11]) of each of the unions for norms $< \varepsilon$ does so. The converse also follows at once from the definition of a many-valued limit.

Correspondingly, the sum (4) for any given subdivision of (a, b) may be obtained as the limit, when $\varepsilon \to 0$, of the union of all "Riemann" sums of f with respect to g for subdivisons, of norms less than ε, consecutive to the given one.

§ 2.

Contraction of the many-valued integral.

If $f(t)$ and $g(t)$ are bounded we can always choose any number n of points t_i in (a, b) so that the corresponding relation (A) reduces to many-valued *equality*: it suffices to take only points t_i at which there is

[9]) As I have mentioned in my quoted paper on many-valued integration, the more general case is best treated by the theory of infinities which I have used in my Dissertation and outlined in a short paper to the Brit. Ass. Meeting at Bristol, Sep. 1930. With the ordinary rough notions of addition and equality of infinities, the relation (A) would have a meaning, and be correct, if infinities *all of the same sign* were admitted on the left-hand side. But apart from the cumbersomeness of this condition, the information so obtained would have to be supplemented by further conditions of a similar type in any manipulation.

[10]) Here cp. "Many-valued algebra" § 9 (pp. 286—290).

[11]) The frame of a many-valued quantity is defined as having all the values and limiting values of this quantity.

symmetry of limits of $f(t)$ on the right and left[12]), and this, by the theorem of W. H. Young, occurs except at most at a countable set of points.

But it *may* also be possible so to choose them that the sum on the left-hand side of (A) actually misses out some of the values of the integral on the right; i. e. to choose a subdivision of (a, b) which *actually contracts* the many-valued integral. Any subdivision consecutive to this one will then also actually contract the integral; and will in fact suppress the same values as the first subdivision, and possibly some more.

Given any two subdivisions which actually contract the integral, we can (by combining all the points of division of either) form a subdivision which is consecutive to both, and therefore suppresses (at least) all the values of the integral that are suppressed by either one of the given subdivisions.

Generally, given any q subdivisions of (a, b) which actually contract the integral, we can form a $(q+1)$ th which actually contracts it and supresses at least all the values suppressed by any of the given subdivisions.

The values of the integral

$$\int_a^b f(t)\,dg$$

which can be suppressed by subdivision in this manner may be considered as *anomolous* values of the integral. And the question arises whether it may not be possible, by successive subdivision, to obtain in the limit a quantity which has all the values of

$$\int_a^b f(t)\,dg$$

except its anomolous values. *In that case*[13]), we should be justified in

---

[12]) "Many-valued Riemann-Stieltjes integration" I, § 3, pp. 333, 334. The stated property is not used in the present paper.

[13]) Merely to ignore all the anomolous values of the integral would of course be a complete error of method, unless we had some guarantee, such as the above process may easily be seen to give, that the resulting quantity would be "existent", i. e. not ö, that it would be closed, and have the normal properties of a many-valued functional with regard to f and g and the range of integration (a, b).

As a matter of fact, it follows from the initial remark of this section that, for the actual contraction of

$$\int_a^b f\,dg,$$

Continuation of the footnote [13]) see the following page.

regarding this quantity tentatively as a new and narrower many-valued integral of f with respect to g for (a, b).

The possibility is bound up with a Lemma on families of sets which I shall give in the next section.

§ 3.

Lemma on families of sets.

Lemma. *Given any family of closed sets of points H, such that the product of any two sets of the family contains another set of the family, there is one and only one (closed) set H_0 which is contained in all the sets of the family, and is the limit of a descending sequence of sets of the family:*

$$H_0 = \lim_{i \to \infty} H_i, \qquad H_i \supset H_{i+1} \quad \text{for each } i.$$

To show this, we consider, together with the sets H, all the sets which are limits of descending sequences of these sets H_i, and note that this wider family of closed sets H has still the property that the product of any two (and hence any finite number of) sets of the family contains another set of the family, and more generally *the product of any countable number of sets of the new family contains another set of this family.* For if

$$H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots, H^{(j)}, \ldots$$

are the countable number of given sets,

$$H^{(j)} = \lim_{i \to \infty} H_i^{(j)}, \qquad (H_i^{(j)} \supset H_{i+1}^{(j)} \text{ for each } i)$$

where $H_i^{(j)}$ belongs to the original family [14]). The product of the i sets

$$H_i^{(1)}, H_i^{(2)}, \ldots, H_i^{(i)},$$

where f and g are bounded, it suffices to consider all subdivisions of (a, b) having as points of division those points exclusively at which there is no symmetry of the functional limits of f on the right and left. As these points are countable it follows that *for the actual contraction of*

$$\int_a^b f\,dg,$$

only a (certain) countable set of subdivisions of (a, b) need be taken into consideration. This set provides of itself a sequence of subdivisions suppressing in the limit all the anomolous values of the integral.

This method of argument is however based on the strictly one-dimensional theorem concerning the symmetry of functional limits, (in more dimensions the corresponding symmetry only occurs except on a countable set of "monotone" curves, surfaces etc.). That which I shall indicate in the text is not thus restricted, and is also independent of a priori conditions of boundedness for f and g.

[14]) If $H^{(j)}$ is a set of the original family, we simply take $H_i^{(j)} = H^{(j)}$ for each i.

contains a set

$$H_i^{(0)}$$

of the original family, for which we have a fortiori,

$$H_i^{(0)} \subset H_i^{(j)} \quad \text{for each } j < i.$$

Proceeding to upper and lower limits for $i \to \infty$, and fixed j, we get

$$\underline{\lim}\, H_i^{(0)} \subset H^{(j)} \quad \text{for each } j.$$

Now *the lower limit of any succession of sets $H_i^{(0)}$ of the original family always contains the limit of some descending sequence of such sets,* since we can find by induction H_i contained both in H_{i-1} and in $H_i^{(0)}$, with $H_1 = H_1^{(0)}$. Therefore the left-hand sides of the preceding relation certainly contain a set H of the wider family, and our statement is proved.

By this remark, we reduce the proof of the required Lemma to that of the following one:

Given any family of closed sets of points H, such that the product of any countable number of sets of the family always contains another set of the family, there is one (and only one) set H_0 of the family which is contained in all the other sets of the family.

The proof of this uses Cantor's transfinite induction principle and is immediate: Given any set H_1 of the family, not contained in all the sets of the family, we can find another H_2 contained in it; given any descending sequence, $H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_i \supset \ldots$, of sets of the family, we can find another H_ω contained in them all. Thus we can form a transfinite chain of sets of the family

$$H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_i \supset \ldots \supset H_\omega \supset H_{\omega+1} \supset \ldots \supset H_\alpha \supset H_{\alpha+1} \supset \ldots$$

proceeding as long as H_α is not contained in all the sets of the family. Such a transfinite chain of closed sets must necessarily terminate[15]), and hence for some index α $(< \Omega)$, H_α is contained in all the sets of the family.

§ 4.

Existence theorem and definition of the inner integral.

The application of the Lemma to our problemis obvious. For the quantities

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\,dg \tag{4}$$

[15]) Cp. Hobson, Real Variable **1**, § 82, 2nd ed. p. 116), where the reference is to Baire, Annali di Mat. (3) **3**, p. 46 seq. It should be noted that the expression "closed" is applied in the quoted book to all sets (bounded or not) which contain all their finite limiting points, so that our Lemma holds with this interpretation of the term, and the conditions of boundedness in our application are not, therefore, necessitated by our use of the Lemma.

defined for each subdivision of (a, b) are closed many-valued quantities, and any two of them include, among their common values, all the values of another of the quantities. Hence there is, by the Lemma, one and only one closed many-valued quantity L, included in every one of the sums (4), for any subdivision of (a, b), and the limit[16]) of such sums for a sequence of subdivisions of (a, b). Since further subdivision can only contract any given sum (4), we can always choose this sequence to consist of subdivisions each consecutive to the preceding, and of norm tending to zero.

Thus we obtain our

Existence theorem. *If the complete Riemann sums of $f(t)$ with respect to $g(t)$, for all subdivision consecutive to some one, are bounded, then there is one and only one many-valued quantity L which is included in the sum*

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\,dg \qquad (t_0 = a,\ t_n = b),$$

for every subdivision of (a, b) by points $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, and is the many-valued limit of a sequence of such sums (for subdivisions of norm tending to zero, each consecutive to the preceding)[17]).

The quantity L may be called the *innermost contraction* of the many-valued Riemann-Stieltjes integral $\int f\,dg$. We shall refer to it directly as the *inner integral of $f(t)$ with respect to $g(t)$ for (a, b)*, and denote it by

$$\boxed{\overline{\int_a^b} f(t)\,dg}.$$

We can state the definition in the ε-form by appealing to the second characteristic property of complete limits[18]).

ε-definition of the inner integral. Under the stated hypothesis of boundedness of the Riemann sums,

$$\overline{\int_a^b} f(t)\,dg - L$$

[16]) The Lemma provides the existence of a "contracting" sequence of these sums, whose limit is given therefore by that of their *sets* of values. Cp. "many-valued Algebra", § 9.

[17]) The same reasoning and result hold for any closed many-valued function of intervals which "contracts by subdivision", with the corresponding condition if we wish to avoid infinities.

[18]) "Many-valued Algebra" § 7, Theorem II (p. 276): If L is the complete limit of a succession of quantities A_m, then

$$A_m < L + \theta\varepsilon \quad \text{for all } m > N_\varepsilon.$$

is the closed many-valued quantity (always then existent and unique)[19]) such that

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg \succ L$$

for *every* subdivision of (a, b), and

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg \prec L + \theta\, \varepsilon$$

for *some* subdivision, depending on ε, (θ being as usual the quantity having all values between ± 1 inclusive).

The first of these two conditions is the same as the first in the former definition, the second implies that the limit of some sequence of sums

$$\Sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg$$

for subdivision of (a, b) is included in L,[20]) and hence, by the first condition, equal to it, which is the second condition in the original definition. Conversely the latter condition also implies the second condition in the ε-definition, by the quoted property of complete limits.

This ε-definition may also be enunciated in terms of *unions of complete Riemann sums*, by virtue of the alternative definition of the Riemann-Stieltjes integral given on p. 131.

Alternative ε-definition of the inner integral. Under the same hypothesis of boundedness of the Riemann sums,

$$\overline{\int_a^b} f(t)\, dg = L$$

is the closed many-valued quantity (seen a posteriori to be existent and unique) such that, if Ψ be the union of all complete Riemann sums of f with respect to g for subdivisions of (a, b) consecutive to a given one, then, for each ε,

$$\Psi + \theta\, \varepsilon \succ L$$

whatever be the given subdivision, and

$$\Psi \prec L + \theta\, \varepsilon$$

if the given subdivision be appropriately chosen (depending on ε).

---

[19]) The existence and unicity are insured as soon as we prove the equivalence of this and the preceding definition.

[20]) Because L is closed, and $A_m \succ B_m$ implies $\lim_{m \to \infty} A_m \succ \lim_{m \to \infty} B_m$.

To see the equivalence of this with the last form of the definition, observe first that since the frame of Ψ includes the sum

$$\Sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg$$

for the subdivision assumed given, the new first condition, which is equivalent to

$$\boxed{\Psi} > L,^{21})$$

is implied a fortiori in the former first condition; and the new second one, which is equivalent to

$$\boxed{\Psi} < L + \theta\varepsilon,$$

implies a fortiori the old second condition. Further, the new first condition implies, by a passage to the limit with variable subdivisions for Ψ:

$$\Sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg + \theta\varepsilon > L,$$

for each ε, and hence the old first condition, since the first sum on the left is closed. Finally, if the subdivision chosen for Ψ be consecutive to that for which the sum

$$\Sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg$$

is taken, and of sufficiently small norm, it is certainly included in

$$\Sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg + \varepsilon/2,$$

and so the old second condition, for $\varepsilon/2$, implies the new one for ε.

A convenient and concise form of each of these definitions is obtained by making use directly of the idea of the *narrowest* of a set of many-valued quantities, as the one contained in all the others, *when existent*, in which case it is also unique. Each of the definitions may then be expressed by saying that the inner integral is the *narrowest* of the closed quantities L which satisfy the *second* of the two indicated conditions. The first condition is then automatically implied in each case. The reason for this is simply that each sum (4) is itself closed and satisfies the second condition for the quantity L in the two earlier definitions, and each $\Psi + \theta\varepsilon$, when Ψ is a union of all Riemann sums for subdivisions consecutive to any given one, is closed and satisfies the second condition in the final definition. Thus:

---

21) "Many-valued Algebra", p. 273.

(A) *The inner integral*

$$\int_a^b f(t)\,dg$$

is the narrowest of the many-valued quantities L such that

$$L \supset \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i=q_n} \int_{t_i^{(n)}}^{t_i^{(n)}} f(t)\,dg, \qquad t_0^{(n)} - a < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \ldots < t_{q_n}^{(n)} = b.$$

(B) *It is the narrowest of the closed quantities L such that, given any ε,*

$$L + \theta\varepsilon \supset \sum \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,dg$$

for some subdivision of (a, b).

(C) *It is the narrowest of the closed quantities L such that, given any ε,*

$$L + \theta\varepsilon \supset \Psi^{(\varepsilon)},$$

where $\Psi^{(\varepsilon)}$ is a union of Riemann sums for all subdivisions consecutive to some one (depending on ε).

§ 5.

Connection with „modified" and upper and lower Stieltjes integration.

By transforming the definition in the above manner, we come at once upon "modified" Stieltjes integration, when we express the condition that the inner integral should be one-valued.

Suppose we know that among the quantities L in (C) there is a *number* L_0. In that case L_0 is certainly the "narrowest" of all the quantities L, and equal therefore to the inner integral. Thus

A necessary and sufficient condition for the inner integral

$$\int_a^b f(t)\,dg$$

to be one-valued and equal to L_0, is that for all subdivisions of (a, b) consecutive to some one (depending on ε), the complete Riemann sums of f with respect to g are included in

$$L_0 + \theta\varepsilon$$

(for each $\varepsilon > 0$).

This is obviously the same as the condition of existence of a "modified" Stieltjes integral[22]) of f with respect to g, equal to L_0, when stated in the following form:

---

[22]) S. Pollard, loc. cit. [2]) p. 90.

Given any $\varepsilon > 0$, *whenever the points of division* t_i *comprise among them certain* q_ε *fixed points of* (a, b), *depending on* ε, *we always have, for every choice of intermediary points* τ_i $(t_{i-1} \leqq \tau_i \leqq t_i)$ [23])

$$|\Sigma f(\tau_i)\cdot[g(t_i) - g(t_{i-1})] - L_0| < \varepsilon.$$

Accordingly

The inner integral is one-valued if, and only if, the "modified' Stieltjes integral exists; and the two are then equal.

Next consider the *upper and lower Darboux sums* of f with respect to g, when f is assumed bounded [24]):

$$\Sigma f_i'[g(t_i) - g(t_{i-1})], \qquad \Sigma f_i''[g(t_i) - g(t_{i-1})],$$

where f_i' is the upper, f_i'' the lower, bound of f in the mesh (t_{i-1}, t_i), *or vice versa*, according as $[g(t_i) - g(t_{i-1})]$ is or is not non-negative.

They are clearly the *upper and lower values of the complete Riemann sum* of f with respect to g for the same subdivision [25]).

In many-valued Riemann-Stieltjes integration, the largest and least values of the integral were the largest and least possible limits of the upper and lower Darboux sums respectively, for sequences of subdivisions of norms tending to 0. In the present case, we shall at once see that

The largest and least value of the inner integral

$$\int_a^b f(t)\,dg$$

when f *is bounded and* g *monotone, are respectively the least possible limit of the upper, and the greatest possible limit of the lower, Darboux sums of* f *with respect to* g *for sequences of subdivisions of* (a, b), *of norms tending to* 0.

For this, the most convenient definition to appeal to is the second ε-definition of the inner integral (p. 136). Let $\bar{I}$ denote the least possible limit of the upper Darboux sums for the considered sequences of subdivisions. Then there is a subdivision for which the upper Darboux sum is less than $\bar{I} + \varepsilon$, and hence [26]) the union Ψ of all complete Riemann sums for subdivisions consecutive to this one has certainly upper value less than $\bar{I} + \varepsilon$. By the first condition in the considered definition, this must imply

$$\bar{I} \geqq \bar{L}.$$

---

[23]) This last clause is not explicitely stated in Mr. Pollard's text, but may be inferred from the subsequent discussion.

[24]) Many-valued integration I, p. 330.

[25]) Here cp. "Many-valued Algebra", pp. 264, 269.

[26]) Since the upper Darboux sums with respect to a monotone increasing function decrease by subdivision (the lower ones increasing).

On the other hand, by the second condition, there are subdivisions of norms as small as we please for which complete Riemann sums are included in $L + \theta\varepsilon$, and the upper Darboux sums therefore not greater than $\bar{L} + \varepsilon$, so that the least possible limit $\bar{I}$ of these upper Darboux sums cannot exceed $\bar{L} + \varepsilon$, for any ε, i. e.

$$\bar{I} \leqq \bar{L}.$$

Thus the statement relative to the upper value of the inner integral is proved, and similarly that relative to the lower value.

Defining upper and lower integrals which I shall for clearness call the "*modified*" *upper and lower Stieltjes integrals* (to prevent all possible confusion with the largest and least values of the many-values Riemann-Stieltjes integral) as *the least limit of the upper, and greatest limit of the lower, Darboux sums for sequences of subdivisions of norms tending to* 0,[27]) we may then state:

When $f(t)$ *is bounded and* $g(t)$ *monotone, the largest and least values of the inner integral of* f *with respect to* g *are the "modified" upper and lower Stieltjes integrals of* f *with respect to* g.

§ 6.

Elementary properties of inner integration.

The elementary properties of *inner integration* are most readily obtained from those of (many-valued) Riemann-Stieltjes integration, by appealing to the first definition of the inner integral, and noting that any two, or more generally *any finite number, of inner integrals*

$$\int_a^b f_r(t)\, dg_r$$

may be obtained from the sums (4) *of the corresponding Riemann-Stieltjes integrals for the same sequence of subdivisions of* (a, b).

We then obtain directly from the corresponding properties of many-valued Riemann-Stieltjes integration[28]), by addition and passage to the limit:

$$\int_a^b (C_1 f_1 + C_2 f_2)\, dg(t) \subset C_1 \int_a^b f_1\, dg + C_2 \int_a^b f_2\, dg,$$

$$\int_a^b f(t)\, d(C_1 g_1 + C_2 g_2) \subset C_1 \int_a^b f\, dg_1 + C_2 \int_a^b f\, dg_2$$

[27]) When $g(t)$ is monotone, these coincide with the upper and lower Stieltjes integrals defined as the lower bound of the upper, and upper bound of the lower, Darboux sums for all subdivisions of (a, b). This artificial simplification of the definition, which is usually adopted (cp. Pollard, loc. cit. p. 96; E. W. Hobson, Real Variable I, § 377) has somewhat hampered the extension to non-monotone integrators.

[28]) "Many-valued integrals" I, § 2, p. 330.

(C_1, C_2 any constant numbers). Further:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dg + \int_b^c f(t)\,dg = \int_a^c f(t)\,dg}.$$

The immediate inference from the theorem in Riemann-Stieltjes integration is only that the sum of the two inner integrals on the left is *included* in the right-hand integral. On the other hand, since the sum on the left-hand side is a limit of sums (4) for a certain sequence of subdivisions of (a, c), it must include the inner integral over this interval by definition. The "formula of integration by parts" requires no further reasoning[29]):

$$\int_a^b 1\,d(fg) < \int_a^b f\,dg + \int_a^b g\,df.$$

Finally the main theorem of my companion paper, Part I[30]), leads at once to the following one:

Theorem. *If*

$$\int_a^t h(t)\,dg(t) = G(t)$$

is one-valued, then for every bounded $f(t)$,

$$\int_a^b f(t)\,h(t)\,dg = \int_a^b f(t)\,dG.$$

This result I shall improve, by substituting for the Riemann-Stieltjes integral of h with respect to g the *inner integral*, assuming only this to be one-valued. The proof is a direct one, including as a particular case the method of proof of all the previous cases.

I use the following

Lemma. Let t_i be the points of division in the subdivision of (a, b) referred to in the alternative definition of

$$\int_a^b h(t)\,dg = L,$$

e. such that for every subdivision consecutive to it, the complete Riemann sum of h with respect to g is included in

$$L + \theta\varepsilon;$$

[29]) It is curious that the "one-valued" form of this theorem should have completely eluded proof in Mr. Pollard's treatment, so that he even supposed is not to be true. Cp. loc. cit. [2]), p. 94, note.

[30]) "Many-valued integrals" I, § 4, p. 336.

and write

$$L_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} h\, dg,$$

$$\varphi_i = h(t_{i-1}, t_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})].$$

Then we have

(X) $$\sum_{i=1}^{i=n} |\varphi_i - L_i| < L - L + 3\theta\varepsilon.$$

(Here $\sum_{i=1}^{n} L_i = L$, and $\sum_{i=1}^{r} \varphi_i$ is the complete Riemann sum for the given subdivision.)

Proof. By the second ε-definition of the inner integral (p. 136), we can find a union of Riemann sums for subdivisions of (t_{i-1}, t_i) which, when increased by $\theta\varepsilon/n$, certainly includes the inner integral L_i over this interval. Let us denote this union of Riemann sums by ψ_i. Then

$$L_i < \psi_i + \theta\varepsilon/n,$$

i. e.

$$\varphi_i - L_i < \varphi_i - \psi_i + \theta\varepsilon/n,$$

and so

$$\sum_{i=1}^{i=n} |\varphi_i - L_i| < \sum_{i=1}^{i=n} |\varphi_i - \psi_i + \theta\varepsilon/n| < \sum_{i=1}^{i=n} |\varphi_i - \psi_i| + \theta\varepsilon.$$

Now

$$\sum_{i=1}^{i=n} |\varphi_i - \psi_i| = \sum_{(r,s)} (\varphi_r - \psi_r + \psi_s - \varphi_s) = \sum_{(r,s)} (\varphi_r + \psi_s) - \sum_{(r,s)} (\psi_r + \varphi_s),$$

where r runs through the indices i for which $\varphi_r > \psi_r$, and s through the other indices i. Since φ_r is a Riemann sum (with a single term) for the interval (t_{r-1}, t_r), and ψ_s a union of Riemann sums for subdivisions of the interval (t_{s-1}, t_s), and the intervals for all the r and the s form the given subdivision, it follows[31]) that $\sum(\varphi_r + \psi_s)$ is itself a union of Riemann sums for subdivisions consecutive to the given one. And similarly so is $\sum(\psi_r + \varphi_s)$. Hence each of these sums is included in

$$L + \theta\varepsilon,$$

and so

$$\sum_{i=1}^{i=n} |\varphi_i - \psi_i| < L + \theta\varepsilon - L + \theta\varepsilon = L - L + 2\theta\varepsilon,$$

and combining with the previous inequality, we obtain the required one.

[31]) *Because we may subdivide each of the intervals* (t_{i-1}, t_i) *independently and still have a subdivision of the whole* (a, b). This is the essential condition to retain in generalisations.

Use the Lemma under the Hypothesis that L *is one-valued* (when, by the addition theorem,

$$\int_a^t h(t)\,dg = G(t)$$

is also one-valued for every t between a and b). The right-hand side of (X) then reduces to $3\theta\varepsilon$.

Assume $f(t)$ bounded, say

$$f(t) < K\theta \quad \text{in} \quad (a, b).$$

The values of the complete Riemann sum of $f(t)h(t)$ with respect to g and of that of $f(t)$ with respect to $G(t)$ are correlated in pairs:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{i=n} f(\tau_i)\,h(\tau_i)\cdot[g(t_i) - g(t_{i-1})] \\ \text{and} \\ \sum_{i=1}^{i=n} f(\tau_i)\cdot[G(t_i) - G(t_{i-1})] \end{array}\right\} \tau_i \text{ arbitrary in } (t_{i-1}, t_i)$$

whose difference

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(\tau_i)\{h(\tau_i)\cdot[g(t_i) - g(t_{i-1})] - [G(t_i) - G(t_{i-1})]\} < \Sigma f(\tau_i)[\varphi_i - L_i]$$

is included in

$$\sum_{i=1}^{i=n} K\theta[\varphi_i - L_i] = K\theta \sum_{i=1}^{i=n} |\varphi_i - L_i|,$$

and hence, by the Lemma, in $3K\theta\varepsilon$. In other words, *the complete Riemann sums of* $f(t)h(t)$ *with respect to* $g(t)$, *and of* $f(t)$ *with respect to* $G(t)$, *for the subdivision considered in the Lemma, are such that each value of the one differs from some value of the other by less than* $3K\varepsilon$.

Since in the Lemma, any subdivision consecutive to the given one might be substituted for it, our conclusion also holds for each such consecutive subdivision. Hence we deduce a fortiori: *The two sums*

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,h(t)\,dg, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,dG(t)$$

are such that each value of the one differs from some value of the other by not more than $3K\varepsilon$, where the subdivision is that considered in the Lemma or any consecutive to it. Since such a subdivision exists for each ε, we get:

There exists a sequence of subdivisions of (a, b) *such that for it, and for every sequence of subdivisions term-by-term consecutive to it, the sums*

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,h(t)\,dg, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\,dG$$

have the same many-valued limit.

Since for one of the sequences term-by-term consecutive to any given one, the sums in question tend respectively to

$$\int_a^b f(t)\,h(t)\,dg, \qquad \int_a^b f(t)\,dG,$$

it follows that these two inner integrals are equal, and we have the

Theorem. *If*

$$\int_a^t h(t)\,dg(t) = G(t)$$

one-valued, then for every bounded $f(t)$

$$\int_a^b f(t)\,h(t)\,dg = \int_a^b f(t)\,dG.$$

The symmetrical form of this theorem is:

If

$$\int h_1(t)\,dg_1 = \int h_2(t)\,dg_2$$

are one-valued, then for any bounded $f(t)$

$$\int f(t)\,h_1(t)\,dg_1 = \int f(t)\,h_2(t)\,dg_2$$

irrespective of these latter integrals being one-valued or not.

§ 7.

Term-by-term "inner" integration with respect to a function of bounded variation.

From the corresponding theorem for many-valued Riemann-Stieltjes integrals[32]), it follows a fortiori, using the addition theorems for inner integration, that:

If $f_n(t)$ *tends to* $f(t)$ *uniformly in* (a, b), *as* $n \to \infty$, *and* $g(t)$ *has bounded variation, then*

$$\int_a^b f(t)\,dg = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dg.$$

For in that case

$$\int_a^b (f - f_n)\,dg < \int_a^b (f - f_n)\,dg \to 0$$

[32]) Many-valued integrals II (Integration of bounded functions with respect to functions of bounded variation) § 2, p. 353.

as $n \to \infty$, and the rest follows by

$$\text{(Y)} \qquad \begin{aligned} \overline{\int} f(t)\,dg &< \overline{\int} f_n(t)\,dg + \overline{\int}(f - f_n)\,dg, \\ \overline{\int} f_n(t)\,dg &< \overline{\int} f(t)\,dg + \overline{\int}(f_n - f)\,dg. \end{aligned}$$

Also from the theorem for many-valued integration of boundedly convergent sequences[33]), we at once infer the corresponding (and better) theorem for inner integration:

If $f_n(t) \to f(t)$ boundedly[34]) as $n \to \infty$, and $g(t)$ has bounded variation in (a, b), then

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\int} f_n\,dg - \underline{\int} f\,dg \geq \lim_{n\to\infty} \underline{\int}[f_n - f]\,dg \geq 0,$$

i. e. the inner integral of the limit, and the limit of the inner integrals, of the functions f_n, certainly have a common value.

Finally from the last theorem on many-valued term-by-term integration in my former paper[35]), we deduce a fortiori:

If $f_n(t) \to f(t)$ boundedly in (a, b), as $n \to \infty$, and $g(t)$ has bounded variation, in (a, b), and if the set of points of unsteady convergence of f_n to f in (a, b)[36]) has content zero with respect to the indefinite total variation $G(t)$ of $g(t)$ in (a, b), then we have certainly, in the many-valued sense,

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\int_a^b} f_n(t)\,dg = \underline{\int_a^b} f(t)\,dg.$$

For by (Y), it suffices for the conclusion of this theorem that we should have

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\int_a^b}(f_n - f)\,dg = 0,$$

and since

$$\overline{\int_a^b}(f_n - f)\,dg < \overline{\int_a^b}(f_n - f)\,dg,$$

which tends to 0 as $n \to \infty$ by the theorem for many-valued Riemann-Stieltjes integrals, this is true a fortiori.

---

[33]) Ibid. p. 354.

[34]) *I. e.* if $|f_n(t) - f(t)|$ is uniformly bounded (for all n and t).

[35]) II, § 3, p. 359.

[36]) Points at which

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{t'\to t}} |f_n(t') - f(t')| > 0 \qquad (t' \text{ in } (a, b)).$$

Cp. my paper on "Non-uniform convergence and term-by-term Riemann-Stieltjes integration", Lond. Math. Soc. Journal 6, Part 3 (1931), p. 234.

§ 8.

Refinements of the addition theorems for integrators of bounded variation.

If g_1 and g_2 are both positively monotone and $f(t)$ bounded, then[37] for each mesh (t_{i-1}, t_i) of any subdivision of (a, b), the two quantities

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, d(g_1 + g_2)$$

and

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg_1 + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg_2$$

have the same breadth. The sum of these breadths for all the meshes of the subdivision is the breadth of the sums

$$\Sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, d(g_1 + g_2)$$

and

$$\Sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg_1 + \Sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg_2,$$

which is thus again the same.

Since we may choose the subdivision so that the former sum is included in

$$\overline{\int_a^b} f(t)\, d(g_1 + g_2) + \theta\varepsilon,$$

when it certainly has breadth exceeding that of this inner integral by not more than ε, it follows that the breadth of

$$\overline{\int_a^b} f(t)\, dg_1 + \overline{\int_a^b} f(t)\, dg_2$$

cannot exceed the breadth of

$$\overline{\int_a^b} f(t)\, d(g_1 + g_2),$$

and must therefore be equal to it. Thus, as for the original integrals:

If $f(t)$ is bounded, and $C_1 g_1(t)$, $C_2 g_2(t)$ are positively monotone, then

$$\overline{\int} f(t)\, d(C_1 g_1 + C_2 g_2) \leqq C_1 \overline{\int} f(t)\, dg_1 + C_2 \overline{\int} f(t)\, dg_2.$$

That is to say the left-hand side, though included in the right, has the same largest and least values and the same breadth.

---

[37] Many-valued integrals II § 1, d), p. 349.

Next let $g(t)$ have bounded variation only, and let

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t)$$

be its canonical expression as the difference of two monotone functions. Then[38]) for each mesh (t_{i-1}, t_i) of any subdivision of (a, b),

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg_1 - \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg_2$$

has breadth exceeding that of

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg$$

by at most

$$\Sigma^{(i)}\, \omega(\xi_r)\, e(\xi_r)$$

where the summation is over those exceptional discontinuities of g which are interior to (t_{i-1}, t_i), denoting as before by $\omega(t)$ the oscillation of $f(t)$ at the point t in (a, b), and by $e(t)$ the *excentricity*

$$e(t) = |g(t+0) - g(t)| + |g(t) - g(t-0)| - |g(t+0) - g(t-0)|,$$

which vanishes at all but the exceptional discontinuities of g interior to (a, b).

Hence by addition, the sum

$$\Sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg_1 - \Sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg_2$$

has breadth exceeding that of

$$\Sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg$$

by at most

$$\Sigma' \omega(\xi_r)\, e(\xi_r) \leqq \Omega_{(a,b)}\, \Sigma' e(\xi_r) \qquad (\Omega_{(a,b)} \text{ oscillation of } f \text{ in } (a, b))$$

where the summation is over *those exceptional discontinuities of g interior to (a, b) which are not among the points of division t_i*.

Now we can choose the subdivision to include as points of division the first N exceptional discontinuities of g, and also to give a value of

$$\Sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\, dg < \int_a^b f(t)\, dg + \theta\varepsilon.$$

This means, since N and ε are arbitrary, and the sum of the excentricities is convergent, that the latter inner integral has breadth at least as great, and therefore the same, as that of

$$\int_a^b f(t)\, dg_1 - \int_a^b f(t)\, dg_2.$$

[38]) Ibid. § 6, p. 373.

Thus the addition formula for inner integration with respect to the two parts in the canonical expression of g is much more precise than that for many-valued Riemann-Stieltjes integration, and we have:

If $f(t)$ is bounded, and $g(t)$ has bounded variation, with canonical expression

$$g(t) = g_1(t) - g_2(t)$$

in (a, b), then

$$\int_a^b f(t)\,dg \leqq \int_a^b f(t)\,dg_1 - \int_a^b f(t)\,dg_2 .$$

In particular, if the inner integral of f with respect to g is one-valued for (a, b), then so are the inner integrals with respect to g_1 and to g_2, and conversely [39]).

Combining the two theorems, we see that

The inner integral of a bounded function f with respect to a function of bounded variation $g(t)$ in (a, b) has precisely the same breadth as the inner integral of f with respect to the indefinite total variation $G(t)$ of $g(t)$ in (a, b).

For $G(t) = g_1(t) + g_2(t)$, and

$$\int_a^b f\,dg_1 - \int_a^b f\,dg_2 \quad \text{and} \quad \int_a^b f\,dg_1 + \int_a^b f\,dg_2$$

have the same breadth.

This reduces the question of the breadth of an inner integral in the case we are considering to that of the breadth of an inner integral with respect to a positively monotone function, which is easily dealt with by means of the corresponding portion of the theory of many-valued Riemann-Stieltjes integrals [40]). By the result there proved, for each mesh (t_{i-1}, t_i)

[39]) This gives the only possible justification for the artificial extension to integrators of bounded variation of the definition of a (modified) Stieltjes integral with respect to a monotone integrator (as the common bound of the upper and lower Darboux sums) by means of the addition formula

$$(M)\int f\,dg = (M)\int f\,dg_1 - (M)\int f\,dg_2$$

whenever the integrals on the right are one-valued.

As in the case of many-valued Riemann-Stieltjes integration, the relation given by the theorem is of no value in general for the difference of an arbitrary pair of monotone functions. These must give the *canonical* expression of a function of bounded variation, that is to say it must be impossible to subtract from both the same positively monotone function without destroying the monotony of one of them.

[40]) II, § 1, e), pp. 350, 351. The breadth of $\int f\,dG$ is (in the wide sense) between $\varepsilon G(Q^{(\varepsilon)})$ and $\Omega_{(\varepsilon)} G(Q^{(\varepsilon)}) + \varepsilon [G(b) - G(a)]$, where $G(E)$ denotes content with respect to G, and $Q^{(\varepsilon)}$ is the set of points at which f has oscillation $\geqq \varepsilon$, in (a, b) as fundamental interval.

of any subdivision of (a, b), the breadth of

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f\,dG$$

lies between

$$\varepsilon G_i(Q^{\varepsilon, i}) \quad \text{and} \quad \Omega_{(t_{i-1}, t_i)} G_i(Q^{\varepsilon, i}) + \varepsilon [G(t_i) - G(t_{i-1})]$$

where $Q^{\varepsilon, i}$ is the closed set of points at which $f(t)$ has oscillation $\geqq \varepsilon$ *in* (t_{i-1}, t_i), and $G_i(E)$ is the content *in* (t_{i-1}, t_i), which differs from $G(E)$ by $[G(t_i + 0) - G(t_i)]$ or by $[G(t_{i-1}) - G(t_{i-1} - 0)]$ or by their sum, or not at all, according as t_i or t_{i-1}, or both, or neither belong to E. To say that t_i belongs to $Q^{\varepsilon, i}$ is the same as saying that f has oscillation $\geqq \varepsilon$ *on the left* at t_i, and to say that t_{i-1} belongs to $Q^{\varepsilon, i}$ is the same as saying that f has oscillation $\geqq \varepsilon$ *on the right* at t_{i-1}.

Thus if we sum for the various meshes of the considered subdivision, we see that the breadth of

$$\sum_{i=1}^{i=q} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\,dG$$

lies between

$$\varepsilon A^{(\varepsilon)} \quad \text{and} \quad \Omega_{(a, b)} A^{(\varepsilon)} + \varepsilon [G(b) - G(a)],$$

with

$$A^{(\varepsilon)} = A^{(\varepsilon)}(t_1, t_2, \ldots, t_q) = G(Q^{(\varepsilon)} - \{t_1, t_2, \ldots, t_q\}) + \Sigma^- [G(t_i) - G(t_i - 0)] + \Sigma^+ [G(t_i + 0) - G(t_i)],$$

where Σ^- denotes summation over those points t_i at which f has oscillation $\geqq \varepsilon$ on the *left*, and Σ^+ over those at which f has oscillation $\geqq$ on the *right*, and $Q^{(\varepsilon)}$ is the set of all points at which f has oscillation $\geqq \varepsilon$ in (a, b).

As the subdivision may be so chosen that it involves as points of division any N of the points of discontinuity of G, and so that at the same time

$$\int_a^b f\,dG < \sum_{i=1}^{i=q} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\,dG < \int_a^b f\,dG + \theta\varepsilon',$$

and as

$$A(t_1, t_2, \ldots, t_q) = A(t_{r_1}, t_{r_2}, \ldots, t_{r_k})$$

— where the t_{r_i} are those of the points t_i at which G is not continuous —, it follows at once that the breadth of

$$\int_a^b f\,dG$$

must lie between

$$\varepsilon \{G(Q_N^{(\varepsilon)}) + \Sigma^- [G(\tau_i) - G(\tau_i - 0)] + \Sigma^+ [G(\tau_i + 0) - G(\tau_i)]\} - 2\varepsilon',$$

and

$$\Omega_{(a,b)}\{G(Q_N^{(\varepsilon)}) + \Sigma^-[G(\tau_i) - G(\tau_i - 0)] + \Sigma^+[G(\tau_i + 0) - G(\tau_i)]\} + \varepsilon[G(b) - G(a)],$$

where $Q_N^{(\varepsilon)}$ is the set $Q^{(\varepsilon)}$ minus the N chosen points τ_i of discontinuity of G, and the summations are now over these N points, while ε' is arbitrary. Making $N \to \infty$ and $\varepsilon' \to 0$, we get the following result, as the analogue for inner integration of the theorem on many-valued Riemann-Stieltjes integrals which we have been using:

If $f(t)$ is bounded and $G(t)$ positively monotone in (a, b), and

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_i, \ldots$$

be the points of discontinuity of $G(t)$ in (a, b), while $E^{(\varepsilon)}$ denotes the set of points, other than the points τ_i, at which $f(t)$ has oscillation $\geqq \varepsilon$ in (a, b), then the breadth of the inner integral

$$\int_a^b f\, dG$$

lies between

$$\varepsilon\{G(E^{(\varepsilon)}) + \Sigma_{(\varepsilon)}^-[G(\tau_i) - G(\tau_i - 0)] + \Sigma_{(\varepsilon)}^+[G(\tau_i + 0) - G(\tau_i)]\}$$

and

$$\Omega_{(a,b)}\{G(E^{(\varepsilon)}) + \Sigma_{(\varepsilon)}^-[G(\tau_i) - G(\tau_i - 0)] + \Sigma_{(\varepsilon)}^+[G(\tau_i + 0) - G(\tau_i)]\} + \varepsilon[G(b) - G(a)],$$

for each ε, where $\Sigma_{(\varepsilon)}^-$ denotes summation over those points τ_i at which f has oscillation $\geqq \varepsilon$ on the left, and $\Sigma_{(\varepsilon)}^+$ over those at which it does so on the right, in (a, b), and $\Omega_{(a,b)}$ is the oscillation of $f(t)$ in (a, b).

As $E^{(\varepsilon)}$ expands when ε is diminished, we may also if we please make the second of these expressions independent of ε, by substituting for $E^{(\varepsilon)}$ the set $E^{(0)} = \lim_{\varepsilon \to 0} E^{(\varepsilon)}$, which is the *set of points of discontinuity of f at which g is continuous*, and omitting the term $\varepsilon[G(b) - G(a)]$, besides extending the summations Σ^-, Σ^+ over all those points τ_i at which f is discontinuous on the left and on the right respectively.

From this we may infer the following test of one-valuedness for the inner integral, corresponding to W. H. Young's test for the one-valuedness of the Riemann-Stieltjes integral:

If $f(t)$ is bounded and $G(t)$ positively monotone, in (a, b), a necessary and sufficient condition for the inner integral

$$\int_a^b f\, dG$$

to be one-valued is that

1. *there are no common right-hand and no common left-hand discontinuities of* f *and* G; in particular f must be continuous wherever G is discontinuous on both sides;

2. *the set of points of discontinuity of* f *at which* G *is continuous has content zero with respect to* G *in* (a, b).[41])

This condition differs from that in the criterion for a one-valued Riemann-Stieltjes integral only in the clause 1., which in the latter criterion would run: "there are no common discontinuities of f and G." Points at which f is discontinuous on one side only and g only on the other were therefore also excluded in that case, whereas in the present one they are allowed.

The way in which inner integration distinguishes between right-hand and left-hand discontinuities, while ordinary many-valued integration does not, may be further exemplified with reference to the theorems on the limits of a Riemann-Stieltjes integral of a bounded function with respect to a function of bounded variation, considered as a function of the range[42]). By virtue of these, we may write, for any subdivision of (a, b):

$$\sum_{i=1}^{i=q} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\,dg = \sum_{i=1}^{i=q} \int_{t_{i-1}+0}^{t_i-0} f\,dg + \sum_{i=1}^{i=q} \left\{ \int_{t_i-0}^{t_i} f\,dg + \int_{t_i}^{t_i+0} f\,dg \right\},$$

while

$$\int_a^b f\,dg = \sum_{i=1}^{i=q} \int_{t_{i-1}+0}^{t_i-0} f\,dg + \sum_{i=1}^{i=q} \int_{t_i-0}^{t_i+0} f\,dg \qquad \begin{pmatrix} t_0 - 0 = t_0 = a \\ t_q + 0 = t_\sigma = b \end{pmatrix}.$$

At any point t_i where g is continuous at least on one side,

$$\int_{t_i-0}^{t_i} f\,dg + \int_{t_i}^{t_i+0} f\,dg = \int_{t_i-0}^{t_i+0} f\,dg,$$

[41]) This is thus a necessary and sufficient condition for the existence of a "modified" Stieltjes integral of f with respect to G, somewhat different in form from that obtained by S. Pollard (loc. cit. [2]) § 18) by splitting up $G(t)$ into a continuous and a singular part. This may be stated: "there are no common right-hand and no common left-hand discontinuities of f and G in (a, b), and the set of all points of discontinuity of f has content zero with respect to the continuous part of G." As any countable set of points has content zero with respect to a continuous monotone function, we may here neglect all the points where G is also discontinuous. The remaining set has content zero with respect to the singular part of G, i. e. has same content with respect to G and with respect to the continuous part of G. Thus Mr Pollard's criterion reduces to the above one, which is slightly more elementary and straightforward, and renders immediately apparent the small distinction actually existing between "modified" and ordinary Riemann-Stieltjes integration when bounded integrands and monotone integrators only are considered. This is made still clearer by the next paragraph.

[42]) Many-valued integrals II, § 8, pp. 377–380.

the first integral vanishing if the continuity is on the left of t_i, the second if it occurs on the right, and of course all three if there is continuity on both sides at t_i.

Thus the difference between the two above expressions is confined to those terms of the second sums on the right-hand sides which relate to the points t_i at which g is *discontinuous on both sides.*

Taking any sequence of subdivisions for which the sum

$$\Sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} f\,g\,d$$

tends to the inner integral

$$\int_a^b f\,dg,$$

and arranging that the nth subdivision should have as points of division at least the n first points of discontinuity of g (supposed given in any countable order); we get the expressions:

$$\int_a^b f\,dg = A + \Sigma\left\{\int_{\tau_i-0}^{\tau_i} f\,dg + \int_{\tau_i}^{\tau_i+0} f\,dg\right\},$$

$$\int_a^b f\,dg = A + \Sigma \int_{\tau_i-0}^{\tau_i+0} f\,dg,$$

where the points τ_i are those at which g is discontinuous on both sides in (a, b), and A is a certain many-valued quantity, namely the limit of the sums of the integrals over the open meshes of the nth subdivision, increased by the sum of the integrals

$$\int_{t_i-0}^{t_i} f\,dg$$

over the points of purely left-hand discontinuity of g, and the integrals

$$\int_{t_i}^{t_i+0} f\,dg$$

over those of purely right-hand discontinuity [43]).

At the same time, the above expressions also show that the difference between ordinary and inner integration (or in particular between ordinary Riemann-Stieltjes and modified Stieltjes integration) is, *in the case of a bounded and integrator of bounded variation,* not as great as might be expected from the nature of the processes. And in particular, we do not get very

[43]) The many-valued quantity A, may depend on the particular chosen sequence of subdivisions, as for many-valued quantities the relation $x+y=x+z$ need not imply $y=z$.

much nearer the (one-valued) Lebesgue-Stieltjes integral by inner integration in terms of Riemann subdivisions. For this "inner contraction" with a different type of subdivision must be used[44]).

By making a variable in the above formulae, and tending to b, or vice versa b variable and tending to a, we may deduce the limit relations:

$$\lim_{t' \to t+0} \int_t^{t'} f\,dg = \lim_{t' \to t+0} \int_t^{t'} f\,dg = \int_t^{t+0} f\,dg,$$

$$\lim_{t' \to t-0} \int_{t'}^{t} f\,dg = \lim_{t' \to t-0} \int_{t'}^{t} f\,dg = \int_{t-0}^{t} f\,dg,$$

where the limits may be obtained by approaching t through any sequence of points on the appropriate side. From this and the addition theorems for inner integrals over abutting intervals, the extension of the definition of an inner integral over an interval (a, b) considered a posteriori as "neutral", to that over open, closed and half-open intervals, or intervals between "directed points", occurs even more simply than for ordinary many-valued integration, indicated in my previous paper. As there is no new method involved, I need not give further details here, except to point out that the above relations imply

$$\int_{t-0}^{t+0} f\,dg = \int_{t-0}^{t} f\,dg + \int_{t}^{t+0} f\,dg,$$

so that the indicated expression for

$$\int_a^b f\,dg$$

may also be written in the form

$$\int_a^b f\,dg = A + \sum \int_{\tau_i - 0}^{\tau_i + 0} f\,dg,$$

where A is the same many-valued quantity as before.

March 1931.

---

[44]) The question is broached in the last section of my Dissertation already quoted.

(Eingegangen am 25. April 1931.)

Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper.

Eine aus zwei getrennten Ringkörpern bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit*).

Von

Viktor Garten und Karl Maruhn in Leipzig.

Einleitung.

Durch neuere Untersuchungen[1]) ist die Existenz ringförmiger Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener gravitierender Flüssigkeiten sichergestellt worden. Herr Lichtenstein, dem man diese Resultate verdankt, stützt sich auf seine früheren „Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen“[2]). Wir unternahmen es, das Resultat auf Gleichgewichtsfiguren, die aus zwei oder mehr ringförmigen Körpern bestehen, auszudehnen. Eine Erleichterung der vorliegenden Untersuchungen bedeutete es, daß Herr Lichtenstein im Rahmen seiner „Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper“ die Existenz einer aus zwei getrennten Massen bestehenden Gleichgewichtsfigur[1]) dargetan hatte. In engstem Anschluß an die vorerwähnten Abhandlungen gelingt der Existenzbeweis, der wie dort wesentlich von der Methode der sukzessiven Approximationen und der Theorie linearer Integralgleichungen Gebrauch macht.

*) Diese Arbeit wurde von den Verfassern im Jahre 1928 auf die Anregungen von Herrn Lichtenstein hin als Preisarbeit an der Universität Leipzig in Angriff genommen.

[1]) L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. a) Zweite Abhandlung. Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur, Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 201—218. b) Dritte Abhandlung. Ringförmige Gleichgewichtsfiguren ohne Zentralkörper, Math. Zeitschr. **13** (1922), S. 82—118.

[2]) L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. a) Erste Abhandlung. Allgemeine Existenzsätze, Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 229—284; **3** (1919), S. 172—174. b) Zweite Abhandlung. Stabilitätsfragen, Math. Zeitschr. **7** (1920), S. 126—231.

Erstes Kapitel.

Die Ringkörper liegen „nahe" beieinander[3]).

§ 1.

Problemstellung.

Wir beziehen die Lage der Punkte im Raume auf ein kartesisches Koordinatensystem x, y, z. Die Punkte O und $\dot{O}$ mit den Koordinaten $x = L,\ y = 0,\ z = 0$ und $x = \dot{L},\ y = 0,\ z = 0\ \ (0 < L < \dot{L})$ seien die Anfangspunkte zweier ebener Koordinatensysteme $\mathfrak{x}, \mathfrak{z}$ und $\dot{\mathfrak{x}}, \dot{\mathfrak{z}}$, die mit dem ursprünglichen durch die Beziehungen

$$x = \mathfrak{x} + L,\quad z = \mathfrak{z};\quad x = \dot{\mathfrak{x}} + \dot{L},\quad z = \dot{\mathfrak{z}} \tag{1}$$

verknüpft sind.

Alle folgenden Betrachtungen dieses Kapitels sollen auch bei sinngemäßer Vertauschung der punktierten mit den unpunktierten Zeichen (und umgekehrt) gelten.

Das von dem Kreise Σ_0 mit dem Radius $R\,(>0)$ um O begrenzte endliche Gebiet werde mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet. Unter s die Bogenlänge auf Σ_0, unter ζ der (nach außen positiv zu rechnende) Abstand der beiden Durchstoßpunkte P_0 und P_1 eines von O ausgehenden Halbstrahls durch Σ_0 und Σ_1 verstanden, definiere die (mit stetiger erster Ableitung versehene) Funktion $\zeta = \zeta(s)$ eine in der Nachbarschaft erster Ordnung von Σ_0 gelegene geschlossene Kurve Σ_1. Die Richtungskosinus des erwähnten Halbstrahles sind $\frac{\mathfrak{x}}{R}, \frac{\mathfrak{z}}{R}$, indem wir die Koordinaten der Punkte von Σ_0 und Σ_1 mit großen Buchstaben bezeichnen, und es gilt

$$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right),\qquad \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right). \tag{2}$$

Zwischen Σ_0 und Σ_1 werde die einparametrige Kurvenschar $\Sigma_t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ eingeschaltet, deren Punkte P_t durch die krummlinigen Koordinaten $s, t\zeta$ bestimmt sind. Wir lassen das System der Kurven Σ_t um die z-Achse rotieren. Die sich ergebenden ringförmigen Rotationsflächen S_t denken wir uns mit homogener gravitierender Flüssigkeit der Dichte f erfüllt. Die von S_t begrenzten Körper selbst heißen T_t.

Wir bezeichnen mit $\varkappa f U_t(s, t\zeta)$ das Newtonsche Potential[4]) des Körpers T_t im Punkte P_t, mit $\varkappa f \dot{U}_{\dot{t}}(s, t\zeta)$ dasjenige des Körpers $\dot{T}_{\dot{t}}$ im gleichen Punkte. Es ist einleuchtend, was hiernach z. B. unter $\varkappa f U_0(s, 0)$ und $\varkappa f U_1(s, \zeta)$ zu verstehen ist. Des weiteren möge $\varkappa f \dot{U}_{10}(s, t\zeta)$ das

[3]) Über den genaueren Inhalt der Aussage „nahe beieinander" siehe weiter unten.

[4]) $\varkappa$ bezeichnet die Gaußsche Gravitationskonstante.

Potential des von den Flächen $\dot{S}_0$ und $\dot{S}_1$ begrenzten schalenförmigen Körpers im Punkte $P_t = (s, t\zeta)$ bedeuten.

Nach Herrn Lichtenstein[5]) gilt für das Potential des Rotationskörpers T_1 in einem Punkte (s, ζ) von Σ_1 die Reihenentwicklung

$$U_1(s,\zeta) = U_0(s,0) - 2\pi R\zeta + 2\int_{\Sigma_0} \zeta' \log\frac{R}{r}\, ds' + 2\Theta^* \log\frac{8L}{R} + \mathfrak{U}_*^{(1)} + {}_*\mathfrak{U}^{(1)} + U_*^{(2)} + U_*^{(3)} + \ldots, \tag{3}$$

die für hinreichend kleine Werte von $|\zeta|$, $\left|\frac{d\zeta}{ds}\right|$, $\left|\frac{R}{L}\right|$, etwa

$$|\zeta|, \left|\frac{d\zeta}{ds}\right| \leqq \varepsilon_1, \qquad \left|\frac{R}{L}\right| \leqq h \tag{4}$$

unbedingt und gleichmäßig konvergiert. In (3) bezeichnet r den geradlinigen Abstand der beiden Punkte s und s' auf Σ_0, Θ^* den Flächeninhalt des von Σ_0 und Σ_1 begrenzten Flächenstückes $\mathfrak{T}$. Endlich bezeichnen $U_*^{(n)}$ $(n \geqq 2)$, sowie $\mathfrak{U}_*^{(1)}$, ${}_*\mathfrak{U}^1$ gewisse Integralausdrücke n-ten Grades über $\zeta, \zeta', \frac{d\zeta'}{ds'}$.

Übrigens läßt jedes Glied der erwähnten Entwicklung eine Darstellung der Form

$$\mathfrak{E}_1^{(n)} \log\frac{8L}{R} + \mathfrak{E}_2^{(n)} \tag{5}$$

zu, wo $\mathfrak{E}_1^{(n)}$ und $\mathfrak{E}_2^{(n)}$ je in (4) analytische und reguläre Funktionen von $\frac{k}{L}$ bedeuten.

Für das Potential des Kreisringkörpers T in einem Punkte $(s, 0)$ von Σ erhält Herr Lichtenstein[6])

$$U_0(s,0) = 2\pi R^2 \log\frac{8L}{R} - \frac{\varkappa}{L}\pi R^2 \log\frac{8L}{R} + \frac{5}{4}\frac{\varkappa}{L}\pi R^2 + \pi R^2 \frac{R^2}{L^2}\left(\frac{3}{4}\frac{\varkappa^2}{R^2} - \frac{1}{4}\right)\log\frac{8L}{R} + O\left(\frac{R^2}{L^2}\right). \tag{6}$$

Auf ganz ähnlichem Wege[7]) findet man, wenn

$$\frac{\dot{L}-L}{L}, \frac{\tilde{R}}{\dot{L}-L} \leqq k \quad (\tilde{R} = \mathrm{Max}(R, \dot{R}),\ k \text{ hinreichend klein}) \tag{7}$$

angenommen wird[8]), für das Potential des Kreisringkörpers $\dot{T}$ im Punkt (s, ζ)

[5]) Vgl. loc. cit. [1]) b) S. 95 Formel (48).

[6]) Siehe loc. cit. [1]) b) S. 87 Formel (7) und S. 108 Formel (40). A. a. O. muß im vorletzten Summanden rechter Hand für $\frac{1}{1^{\frac{1}{\varepsilon}}}$ der Wert $\frac{1}{4}$ eintreten.

[7]) Vgl. loc. cit. [1]) b) S. 103 ff.

[8]) Somit wird jetzt $\frac{\tilde{R}}{L}$ in bezug auf k von zweiter Ordnung klein.

von Σ_1 den Ausdruck

8) $$\dot{U}_0(s,\zeta) = \int_{\dot{\mathfrak{K}}} \mathfrak{U}(s,\zeta;\dot{\alpha},\dot{\gamma})\, d\dot{\alpha}\, d\dot{\gamma}$$ [9]

$$= 2\pi\dot{R}^2 \log\frac{8\dot{L}}{\dot{L}-L} + \frac{\dot{L}-L}{\dot{L}}\pi\dot{R}^2 \log\frac{8\dot{L}}{\dot{L}-L} - \frac{\dot{L}-L}{\dot{L}}\pi\dot{R}^2$$

$$+ \frac{5\pi\dot{R}^2}{8}\frac{(\dot{L}-L)^2}{\dot{L}^2}\log\frac{8\dot{L}}{\dot{L}-L} + \frac{\mathfrak{x}_1}{\dot{L}-L}2\pi\dot{R}^2 - \frac{\mathfrak{x}_1}{\dot{L}}\pi\dot{R}^2\log\frac{8\dot{L}}{\dot{L}-L} + O(k^2).$$

Die erste Annahme aus (7) rechtfertigt die Ausdrucksweise „nahe beieinander liegender Ringkörper", nämlich nahe beieinander bezüglich ihres Abstandes von der Rotationsachse; andererseits hat man sich nach der zweiten Annahme in (7) die beiden Ringkörper als sehr „dünn" vorzustellen.

Bezeichnet jetzt $\dot{\mathfrak{U}}_i(s,\zeta;\dot{s},\dot{\imath}\dot{\zeta})$ das Potential desjenigen Kreises, der durch Rotation des Punktes $(\dot{s},\dot{\imath}\dot{\zeta})$ um die z-Achse entsteht, und $\dot{\varphi}_i$ den vom Halbstrahl durch $(\dot{s},0)$ und der Normalen[10] in $(\dot{s},\dot{\imath}\dot{\zeta})$ an $\dot{\Sigma}_i$ gebildeten Winkel, so erhalten wir

(9) $$\dot{U}_{10}(s,\zeta) = \int_0^1 d\dot{\imath} \int_{\dot{\Sigma}_i} \dot{\zeta}\cos\dot{\varphi}_i\,\dot{\mathfrak{U}}_i(s,\zeta;\dot{s},\dot{\imath}\dot{\zeta})\, d\dot{s}_i$$ [11]

$$= 2\dot{\Theta}^* \log\frac{8\dot{L}}{\dot{L}-L} + \dot{\zeta}\cdot Q, \qquad Q = O(k\log k).$$

Das Potential der Zentrifugalkraft in (s,ζ) bei einer Rotation um die z-Achse mit der konstanten, hinreichend kleinen Winkelgeschwindigkeit ω hat offenbar den Wert

(10) $$\frac{\omega^2}{2}(L+\mathfrak{x}_1)^2.$$

§ 2.

Die Integro-Differentialgleichungen des Problems.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich leicht die Gleichgewichtsbedingung für einen auf S_1 gelegenen Punkt (s,ζ) angeben. Sie lautet

(11) $$U_1(s,\zeta) + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(L+\mathfrak{x}_1)^2 + \frac{\dot{f}}{f}\dot{U}_0(s,\zeta) + \frac{\dot{f}}{f}\dot{U}_{10}(s,\zeta) + C = 0,$$

(C konstant).

[9] $\mathfrak{U}(s,\zeta;\dot{\alpha},\dot{\gamma})$ bezeichnet das Newtonsche Potential der in der Ebene $z=\dot{\gamma}$ gelegenen Kreislinie $x^2+y^2=(\dot{L}+\dot{\alpha})^2$ im Punkte $P_1=(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{z}_1)=(s,\zeta)$.

[10] Beide positiv nach außen gerichtet.

[11] Unter $d\dot{s}_i$ in leicht verständlicher Weise das Bogenelement auf $\dot{\Sigma}_i$ im Punkt $(\dot{s},\dot{\imath}\dot{\zeta})$ verstanden.

Indem wir jetzt für die einzelnen Summanden die gefundenen Ausdrücke (3), (6), (8) und (9) eintragen, erhalten wir

$$(12)\quad 2\pi R\zeta - 2\int_{\Sigma_0} \zeta' \log\frac{R}{r}\,ds' = C^* + 2\Theta^* \log\frac{8L}{R} + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}(L+\mathfrak{X}_1)^2 - \frac{\mathfrak{X}}{L}\pi R^2 \log\frac{8}{}$$

$$+\frac{\dot f}{f}\Big\{2\pi\dot R^2\log\frac{8\dot L}{\dot L - L} + \frac{\dot L - L}{\dot L}\pi\dot R^2\log\frac{8\dot L}{\dot L - L} - \frac{\dot L - L}{\dot L}\pi\dot R^2 + \frac{5\pi\dot R^2}{8}\frac{(\dot L - L)^2}{\dot L^2}\log\frac{8}{\dot L}$$

$$-2\pi\dot R^2\frac{\mathfrak{X}_1}{\dot L - L} - \frac{\mathfrak{X}_1}{\dot L}\pi\dot R^2\log\frac{8\dot L}{\dot L - L} + 2\Theta^*\log\frac{8\dot L}{\dot L - L}\Big\} + O(k^2) + \dot\zeta Q^*$$

$$-\mathfrak{U}_*^{(1)} + {}_*\mathfrak{U}^{(1)} + U_*^{(2)} + U_*^{(3)} + \dots \qquad (C^* \text{ konstant},\ Q^* = O(k\log k)).$$

Die homogene lineare Integralgleichung

$$(13)\qquad \zeta - \frac{1}{\pi R}\int_{\Sigma_0}\zeta'\log\frac{R}{r}\,ds' = 0$$

hat die beiden in üblicher Weise normierten, linear unabhängigen Eigenfunktionen

$$(14)\qquad u_1 = \frac{\sin\psi}{\sqrt{\pi R}},\qquad u_3 = \frac{\cos\psi}{\sqrt{\pi R}},$$

wobei ψ durch die Beziehungen $\sin\psi = \frac{\mathfrak{Z}}{R}$, $\cos\psi = \frac{\mathfrak{x}}{R}$ bestimmt ist. Setzen wir nach dem Schmidtschen Verfahren der Kernzerspaltung

$$(15)\quad \frac{1}{\pi R}\log\frac{R}{r} = u_1 u_1' + u_3 u_3' + N(s,s'),\qquad u_1' = u_1(s'),\ u_3' = u_3(s'),$$

so erhalten wir

$$(16)\qquad \zeta - \frac{1}{\pi R}\int_{\Sigma_0}\zeta'\log\frac{R}{r}\,ds'$$

$$= \zeta - u_1\int_{\Sigma_0} u_1'\zeta'\,ds' - u_3\int_{\Sigma_0} u_3'\zeta'\,ds' - \int_{\Sigma_0} N(s,s')\zeta'\,ds'.$$

Der Kern $N(s,s')$ besitzt keine Nullösungen mehr.

Die auf der Rotationsachse senkrechte Symmetrieebene falle mit der Ebene $z=0$ zusammen. Dann verschwindet das erste Integral rechterhand in (16). Um auch das zweite Integral zum Verschwinden zu bringen, setzen wir:

$$(17)\quad \frac{\omega^2}{\varkappa f}L - \frac{\pi R^2}{L}\log\frac{8L}{R} + \pi\dot R^2\frac{\dot f}{f}\Big[\frac{2}{\dot L - L} - \frac{1}{\dot L}\log\frac{8\dot L}{\dot L - L}\Big] - w = 0,$$

wobei der (hinreichend kleine) Parameter w später so bestimmt werden soll, daß

$$(18)\qquad \int_{\Sigma_0} u_3'\zeta'\,ds' = 0$$

ausfällt. Endlich treffen wir über die konstanten Glieder die Festsetzung

$$(19)\quad C^* + 2\Theta^* \log\frac{8L}{R} + \frac{\omega^2}{2\varkappa f} L^2 + \frac{\dot f}{f}\frac{\dot L - L}{\dot L}\pi\dot R^2 + \frac{\dot f}{f}\Big[2\pi\dot R^2 + \frac{\dot L - L}{\dot L}\pi\dot R^2 + \frac{5\pi R^2}{8}\frac{(\dot L - L)^2}{\dot L^2} + 2\Theta^*\Big]\log\frac{8\dot L}{\dot L - L} = 0.$$

So erhalten wir schließlich

$$(20)\quad 2\pi R\zeta - 2\pi R\int_{\frac{\pi}{2}}^{s_0}\zeta' N(s,s')\,ds' = w\mathfrak{X} + \frac{\omega^2}{\varkappa f}\frac{\mathfrak{X}}{R}\zeta + \frac{\omega^2}{2\varkappa f}\mathfrak{X}^2\Big(1+\frac{\zeta}{R}\Big)^2 + O(k^2) + \dot\zeta Q^* + \zeta Q^{**} + \mathfrak{U}_*^{(1)} + {}_*\mathfrak{U}^{(1)} + U_*^{(2)} + U_*^{(3)} = \Pi(\zeta),$$
$$(Q^*, Q^{**} = O(k\log k)).$$

Aus (17) folgert man, daß in $\Pi(\zeta)$ gegenüber $w\mathfrak{X}$ alle Glieder von höherer Ordnung klein sind. Hieraus ergibt sich in erster Annäherung

$$(21)\qquad \zeta = \frac{w}{2\pi R}\mathfrak{X} + O(k^2) + w\bar Q \qquad (\bar Q = O(k\log k)).$$

Die Existenz der Lösungen $\zeta, \dot\zeta$ ist durch das Verfahren der sukzessiven Approximationen sichergestellt. Das Gelingen des Konvergenzbeweises beruht wesentlich auf dem Bestehen gewisser Ungleichheiten[12]). Die Lösungen erweisen sich als analytische und reguläre Funktionen der Parameter w, $\frac{\tilde R}{\dot L - L}$, $\frac{\dot L - L}{\dot L}$, $\frac{\tilde R}{\dot L - L}\log\frac{8\dot L}{\dot L - L}$, $\frac{\dot L - L}{L}\log\frac{8\dot L}{\dot L - L}$.
Setzen wir nun (21) in (18) ein, so bekommen wir:

$$(22)\qquad \frac{wR}{2\sqrt{\pi R}} + O(k^2) + w\hat Q = 0 \qquad (\hat Q = O(k\log k)).$$

In eindeutiger Weise erhalten wir als Lösung von (22)

$$(23)\qquad w = O(k^2), \quad \omega^2 = O(k^2), \quad \zeta = O(k^2).$$

Zweites Kapitel.

Die Ringkörper liegen „weit" auseinander.

Es sei zunächst bemerkt, daß zu den von jetzt an auftretenden Beziehungen keine entsprechenden hinzukommen, die sich durch Wechsel in der Punktierung ergeben. Ferner sei noch darauf hingewiesen, daß der folgende Fall im vorhergehenden nicht enthalten ist.

Es werden im folgenden die Verhältnisse $\frac{R}{L}$, $\frac{\dot R}{\dot L}$ und neuerdings $\frac{L}{\dot L}$

[12]) Man vergleiche in diesem Zusammenhang die Ausführungen des § 2 der kürzlich erschienenen Monographie von Herrn L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Berlin 1931.

als klein angenommen. Daher wird im Gegensatz zum vorhergehenden Kapitel $\frac{\dot{L}-L}{\dot{L}}$ nicht klein ausfallen. Wir setzen zur Abkürzung

$$\bar{h} = \mathrm{Max}\left(\frac{L}{\dot{L}}, \frac{\dot{R}}{\dot{L}}, \frac{R}{L}\right). \tag{24}$$

und betrachten das Newtonsche Potential $\mathfrak{V}$ einer mit der Liniendichte 1 belegten Kreislinie vom Halbmesser $\dot{L}+\dot{\alpha}$ in der Ebene $z=\dot{\gamma}$ um die z-Achse, $\left(\frac{\dot{\alpha}}{\dot{L}}, \frac{\dot{\gamma}}{\dot{L}} = O(\bar{h})\ ^{13}\right)$. Im Punkte $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1)$ auf Σ_1 erhalten wir

$$\begin{aligned} &\dot{\mathfrak{V}}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1; \dot{\alpha}, \dot{\gamma}) \\ &= \dot{L}\int_0^{2\pi} \frac{d\dot{\chi}}{[\{(\dot{L}+\dot{\alpha})\cos\dot{\chi} - (L+\mathfrak{X}_1)\}^2 + (\dot{L}+\dot{\alpha})^2 \sin^2\dot{\chi} + (\mathfrak{Z}_1-\dot{\gamma})^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\dot{\psi}}{\left[1 + \frac{2[\dot{\alpha} - (L+\mathfrak{X}_1)\cos\dot{\psi}]}{\dot{L}} + O(\bar{h}^2)\right]^{\frac{1}{2}}} = 2\pi\left(1 - \frac{\dot{\alpha}}{\dot{L}}\right) + O(\bar{h}^2). \end{aligned} \tag{25}$$

Daher hat das Potential des Ringes $\dot{T}_1$ im Punkte $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1)$ den Wert

$$\dot{\mathfrak{W}}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1) = \int_{\mathfrak{K}+\mathfrak{T}} \dot{\mathfrak{V}}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Z}_1; \dot{\alpha}, \dot{\gamma})\, d\dot{\alpha}\, d\dot{\gamma} = 2\pi^2 \dot{R}^2 + 2\pi\dot{\Theta}^* + O(\bar{h}^2). \tag{26}$$

In entsprechender Weise findet man

$$\begin{aligned} &\dot{\mathfrak{W}}(\dot{\mathfrak{X}}_1, \dot{\mathfrak{Z}}_1) \\ &= \int_{\mathfrak{K}+\mathfrak{T}} \mathfrak{V}(\dot{\mathfrak{X}}_1, \dot{\mathfrak{Z}}_1; \alpha, \gamma)\, d\alpha\, d\gamma = 2\pi^2 R^2 \frac{L}{\dot{L}} + 2\pi\Theta^* \frac{L}{\dot{L}} + O(\bar{h}^2). \end{aligned} \tag{27}$$

An Stelle von (12) und der analogen Gleichung treten jetzt zwei Integro-Differentialgleichungen, deren jede bis auf ein konstantes Glied und Terme mindestens von zweiter Ordnung mit der in loc. cit. [1]) b), S. 97 angegebenen Formel (69) übereinstimmt. Wir haben es bei dieser Problemstellung im wesentlichen mit nur einem Ringkörper zu tun.

Eine Erweiterung des Problems auf Gleichgewichtsfiguren, die aus mehr als zwei Ringkörpern bestehen, bietet unter geeigneten Annahmen keinerlei neue Schwierigkeiten dar.

[13]) Vgl. Fußnote [9]).

(Eingegangen am 16. Juli 1931.)

In zweiter Auflage:

Physikalisches Handwörterbuch

Herausgegeben von

Arnold Berliner und **Karl Scheel**

Dr.-Ing. e. h., Dr. phil. Geh. Reg.-Rat, Prof. Dr. phil.

Mit 1114 Textfiguren. VI, 1428 Seiten. 1932

RM 96.—; gebunden RM 99.60

Das Handwörterbuch dient zur schnellen ersten Orientierung des Physikers, besonders auf jenen Gebieten, die nicht zu seiner Spezialforschung gehören. Es ist in gleicher Weise das Nachschlagewerk des Nichtphysikers. Bei der großen Ausdehnung der physikalischen Wissenschaft und ihrer Bedeutung für die gesamte Naturwissenschaft und Technik wurde bereits bei Erscheinen der ersten Auflage hervorgehoben, wie viele gerade dieses Werk bisher vermißt hatten.

Das Gebiet, das das Handwörterbuch umspannt, ist außerordentlich weit gefaßt; neben der eigentlichen klassischen und modernen Physik sind behandelt: Astronomie, Astrophysik, Meteorologie, Nautik, Geophysik, Geodäsie, Geologie; mathematische und philosophische Grundbegriffe sind soweit einbezogen, wie sie die neuere Physik angehen. Die physikalische Chemie ist naturgemäß vollkommen einbegriffen, ebenso die Grundlagen der Technik. Darüber hinaus sind aber auch alle Begriffe der Physiologie berücksichtigt, soweit sie physikalischen Untersuchungen zugänglich sind. Die Ergänzung des Handwörterbuches, die sich in der Zunahme seines Umfanges von 903 Seiten der ersten Auflage auf 1428 Seiten der zweiten Auflage ausspricht, ferner die Erhaltung des früheren Mitarbeiterstandes und, soweit es notwendig war, seine gleichwertige Ergänzung sprechen deutlich für die Verbesserung des Buches.

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik werden wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften veröffentlichen, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Knopp, K., Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. I. Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. Zweite, verbesserte Auflage. (Sammlung Göschen Nr. 877.) 1 Bd. 16°. Geb. 135 S. Berlin, Leipzig 1931. Walter de Gruyter u. Co.

Knopp, K., Funktionentheorie. II. Teil. Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. (Sammlung Göschen Nr. 703.) 1 Bd. 16° geb. 138 S. Berlin, Leipzig 1931. Walter de Gruyter u. Co.

Barchanek-Ludwig, Darstellende Geometrie. Ein Lehr- und Übungsbuch für die fünfte bis achte Klasse der Realschulen. Achte, umgearbeitete Auflage. I. Band, für die fünfte und sechste Klasse. Mit 196 Figuren. 1 Bd. 8° brosch. IV u. 155 S. II. Band, für die siebente und achte Klasse. Mit 94 Figuren. 1 Bd. 8° brosch. IV u. 89 S. Wien 1931, Hölder-Pichler-Tempsky A. G.

Močnik-Dintzl-Ludwig-Prowaznik (Močniks Lehr- und Übungsbücher der Mathematik; Unterstufe): Geometrie, 1. Teil, für die 1. Klasse. Mit 110 Figuren. 1 Bd. 8° brosch. IV u. 68 S. — 2. Teil, für die 2. u. 3. Klasse. Mit 229 Figuren. 1 Bd. 8° brosch. IV u. 126 S. — 3. Teil, für die 4. Klasse. Mit 102 Figuren. 1 Bd. 8°. II u. 66 S. — Neu bearbeitet von E. Ludwig. — Arithmetik, 3. Teil, für die 3. Klasse. Mit 31 Figuren. 1 Bd. 8° brosch. 98 S. Auf Grund der von Dr. E. Dintzl besorgten Ausgabe neu bearbeitet von Franz Prowaznik. Wien 1931. Hölder-Pichler-Tempsky A. G.

Bieberbach, L., Projektive Geometrie. (Teubners Mathematische Leitfäden Band 30.) 1 Bd. 8°. Kartoniert. IV u. 190 S. Mit 45 Figuren im Text. Leipzig und Berlin 1931. B. G. Teubner.

Fladt, K., Elementarmathematik. Band 1: Elementargeometrie. 3. Teil: Der Stoff der Obersekunda und Prima (Darstellende Geometrie, Trigonometrie und Analytische Geometrie). 1 Bd. 8° geb. XI u. 337 S. Mit 228 Figuren im Text und 3 Tafeln. Leipzig und Berlin 1931 B. G. Teubner.

Levi-Civita, T., Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa. Attualità Scientifiche N. 41. 1 Bd. 8° brosch. VII u. 108 S. Bologna, 1931. N. Zanichelli.

Sperry, P., Bibliography of projective differential geometry. (University of California Publications in Mathematics Vol. 2, No. 6. pp. 119—127). Berkeley, California, 1931.

Hierzu zwei Beilagen vom Verlag Julius Springer in Berlin.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.
Printed in Germany.